MISCELLANEA TAURINENSIA

TOMUS V.

MÉLANGES

DE

PHILOSOPHIE ET DE MATHEMATIQUE

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE
DE TURIN

POUR LES ANNÉES 1770-1773.



À TURIN

DE L' IMPRIMERIE ROYALE.
AVEC PERMISSION.

SIRE

La Societé Royale de Turin oſe paroître aujourd'hui avec d'autant plus de confiance aux pieds du trône de Votre Majeſté, qu'en vous offrant le fruit de ſes travaux, elle peut s'applaudir de vous

présenter votre propre ouvrage. C'est au zèle éclairé de V. M. pour le progrès des connoissances dignes de l'homme & vraiment utiles à l'humanité, que cette Societé doit sa naissance; les graces dont elle fut honorée par le Roi votre Père de glorieuse mémoire, l'empressement que tant d'hommes illustres des nations étrangères ont témoigné de prendre part à ses travaux, de l'enrichir de leurs productions & de s'associer à la gloire, que la faveur d'un Prince, juste appréciateur des sciences & des arts, fait rejaillir sur ceux qui les cultivent. Les sages, les savans de toute l'Europe, qui ont eu le bonheur de Vous approcher, ne nous reprocheront pas ici le langage imposteur de la flatterie. Il doit nous être permis, SIRE, de nous en rapporter à leur témoignage, & il est aussi heureux que consolant pour nous de trouver, dans leurs éloges, des interprètes non suspects de nos sentimens. Combien de fois les avons-nous entendus relever avec complaisance, non seulement cet accueil gracieux, où la grandeur ne paroît que pour rendre l'affabilité plus touchante, mais encore ces entretiens suivis, où ils ont été étonnés de pouvoir déployer tout leur génie en raisonnant avec un Prince, éga-

lement en état de profiter de leurs lumières, & de leur en communiquer. Le trône n' a rien changé à vos dispositions, il n' a fait que laisser à vos vertus le moyen de paroître ce qu' elles étoient, & ajouter à la volonté de faire le bien, le pouvoir de le faire plus efficacement & avec plus d' étendue. La providence a voulu signaler les commencemens de votre Regne par un bienfait inestimable, en accordant le salut de vos peuples au premier usage que vous avez fait du pouvoir suprème qu' elle venoit de vous confier. Nous n' osons entreprendre de peindre les traits sublimes de sagesse & de bienfaisance, qui ont paru dans ces momens décisifs: ils sont gravés dans tous les cœurs, & ils éclatent dans toutes les occasions par ces transports d' allegresse & de reconnoissance, que la présence d' un bon Prince inspire, & qu' il est si aisé de distinguer de ces mouvemens forcés, qui partent de l' envie de plaire, ou de la crainte d' offenser. L' intérêt général de la societé humaine ne peut que porter nos confrères étrangers à joindre leurs veux aux notres pour la gloire & la prospérité d' un Souverain qui ne respire que le bien de l' humanité. Regnez, SIRE, pour le bonheur de vos peuples, pour jouir de leur amour, pour

le triomphe de la Religion & de la vertu, pour assurer au mérite & aux vrais talens la protection qu'ils attendent de V. M. La Societé Royale tâchera de la mériter par son ardeur à remplir les objets de sa destination, heureuse, si par l'assiduité de ses recherches, elle parvient à ouvrir quelque nouvelle vue d'utilité, qui puisse fournir à V. M. de nouveaux moyens d'exercer sa bienfaisance envers les humains.

Nous avons l'honneur d'être avec le plus profond respect

SIRE

De V. M.

Les très-humbles, très-obeissants, très-fidelles serviteurs & sujets les Associés de vôtre Académie Royale des Sciences.

TABLE

Des Mémoires contenus dans ce Volume.

Dans la claſſe Philoſophique.

De l' Ordre , par le P. GERDIL *Barnabite* pag. 1.
Examen Phyſico-chimique ſur la couleur des fleurs , & de quelques autres ſubſtances végétales , par M.ʳ LE COMTE MOUROUX - - - pag. 11.
CAROLI ALLIONI. *Auctarium ad ſynopſim methodicam ſtirpium Horti Reg. Taurinenſis* - - pag. 53.
JOHANNIS FRANCISCI CIGNA. *De electricitate* pag. 97.
JOHANNIS FRANCISCI CIGNA. *De reſpiratione* pag. 109.
JOHANNIS PETRI MARIÆ DANA. *De ſolano melanoceraſo H. R. Taur.* - - - - pag. 162.
Second mémoire ſur la différente diſſolubilité des ſels neutres dans l' eſprit de vin , contenant des obſervations particulières ſur pluſieurs de ces ſels , par M.ʳ MAQUER - - - - - pag. 137.
Réflexions ſur un eſſai de chimie comparée , par M.ʳ LE COMTE DE SALUCE - - - pag. 191.

Dans la claſſe Mathématique.

Mémoire ſur différentes queſtions d' analyſe , par M.ʳ LE MARQUIS DE CONDORCET - - pag. 1.
Addition , ou Mémoire ſur les ſolutions particulières des équations différentielles , par M.ʳ LE MARQUIS DE CONDORCET - - - - - pag. 12.

+ *Mémoire ſur la détermination des fonctions arbitraires dans les intégrales de quelques équations aux différences partielles, par M.^r MONGE* . . pag. 16.

+ *Second Mémoire ſur le calcul intégral de quelques équations aux différences partielles par M.^r MONGE* pag. 79.

+ *Sur la figure des colonnes, par M.^r DE LA GRANGE* pag. 123.

+ *Mémoire ſur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre le réſultat de pluſieurs obſervations, dans lequel on examine les avantages de cette méthode par le calcul des probabilités, & où l'on reſoud différens problêmes relatifs à cette matière, par M.^r DE LA GRANGE* - - - pag. 167.

+ *Theorème pour ſervir de ſuite au mémoire ſur différentesu qeſtions d'analyſe, par M.^r LE MARQUIS DE CONDORCET* - - - - - pag. 233.

+ *Nouvelles recherches ſur les équations déterminées, pour ſervir de ſuite, & de développement au mémoire ſur le même objet, déja inſéré dans ce volume, par M.^r LE MARQUIS DE CONDORCET* pag. 236.

Imprimatur.

JOHANNES DOMINICUS PISELLI Ord. Præd. S. T. M.
Vic. gen. S. Officii Taurini.

Se ne permette la ſtampa

GALLI per S. E. il Sig. Conte CAISSOTTI DI S. VITTORIA
Gran Cancelliere.

DE L'ORDRE

PAR LE P. GERDIL BARNABITE.

L'homme a la faculté de comparer ſes idées, & de découvrir par ce moyen les rapports qui ſont entr'elles, ou entre les objets qu'elles repréſentent. C'eſt en quoi conſiſte la connoiſſance du vrai. En comparant deux angles droits, j'apperçois que ces deux angles ſont égaux, & ce rapport d'égalité eſt une vérité.

C'eſt par cette même faculté de comparer les objets, & d'en découvrir les rapports que l' homme s'élève à l'intelligence de l'ordre, de la beauté, & de la perfection.

Lorſqu'en comparant deux objets l'eſprit apperçoit un rapport quelconque entr'eux, c'eſt connoître ſimplement une vérité, ainſi qu'on vient de le dire. Si la médaille *A*, & la médaille *B*, que j'ai ſous les yeux, ſont égales entr' elles, en connoiſſant ce rapport d'égalité, je connois ſimplement une vérité, & rien de plus.

Lorſqu'en comparant les rapports de liaiſon, que pluſieurs objets ont entr'eux, je découvre un rapport commun qui exige, qu' ils ſoient liés, ou placés d'une telle maniere, plutôt que de toute autre, tout arrangement ainſi déterminé par un rapport commun me donne l' idée de l'ordre. Je vois une ſuite de médailles impériales ſur une table. Céſar eſt le premier, Auguſte le ſecond. Le rapport de Céſar à Auguſte comme à ſon ſucceſſeur immédiat, exige que Tibère ſoit placé après Auguſte, & ainſi de ſuite. Ce rapport de ſucceſſion immédiate eſt ainſi le principe déterminant qui fixe la place de chaque médaille, & fournit la raiſon pourquoi elle eſt placée en tel endroit, plutôt qu'en tout autre. Or un arrangement où tous les termes ſont placés, en vertu d'un principe qui détermine la poſition de chacun, c'eſt ce qui conſtitue l'idée de l'ordre.

Ainſi l'ordre eſt fondé en nature auſſi bien que le vrai. Ils réſultent l'un & l'autre des rapports des choſes. Un ſimple rapport eſt une vérité ; un rapport qui amene un autre rapport forme l'ordre, & la connoiſſance de l'ordre n'eſt, pour ainſi dire, dans l' homme, qu'une extenſion de l' intelligence du vrai.

Il y a cette différence entre la connoiſſance du vrai, & la connoiſſance de l' ordre, que la première (en tant qu'elle ſe borne au ſimple rapport, indépendemment de l' importance, ou de l' excellence de l'objet) eſt ſuivie d'un ſimple acte d'affirmation, par lequel je me dis à moi-même, que la choſe eſt telle que je l' apperçois. Quand j'apperçois l'égalité de deux angles droits, je me dis à moi-même, que deux angles droits ſont égaux, j'affirme cette égalité, & voilà tout. Mais la connoiſſance de l'ordre eſt de plus ſuivie d'un ſentiment d'approbation, par lequel je me dis à moi-même, non ſeulemente que la choſe eſt comme elle eſt, mais de plus qu'elle eſt comme elle doit être. Ce ſentiment d'approbation eſt toujours ſuivi d'un mouvement de complaiſance, puiſqu' il n'eſt pas poſſible de ne pas ſe complaire en ce qu'on approuve.

Il y a donc une ſorte de diſtinction à faire entre la complaiſance qui accompagne la connoiſſance du vrai, (conſidéré comme ſimple rapport, & abſtraction faite de la qualité de l'objet) & celle qui accompagne la connoiſſance de l'ordre. La connoiſſance du vrai eſt ſuivie d'un ſentiment de complaiſance, & de ſatisfaction, parceque l' intelligence tend au vrai, comme à ſon objet, qu'elle fait effort pour le trouver, & que la ceſſation de cet effort, lorſqu'elle parvient à le découvrir, répand dans l'ame cette douce ſatisfaction que la nature a ménagée dans le paſſage du déſir à la poſſeſſion. Mais la vue de l'ordre excite de plus la complaiſance qui accompagne néceſſairement l'approbation ; c'eſt-à-dire cet acte de l'ame, par lequel on ſe dit qu'une choſe eſt telle, qu'elle doit être.

L'ordre facilite les progrès de l' intelligence, & de la raiſon. Ce n'eſt qu'en ſuivant le rapport, & la liaiſon des idées que l'eſprit paſſe d'une vérité connue à une vérité qui ne l' étoit pas. L'eſprit ſaiſit, & retient avec plus de facilité les objets où il apperçoit un certain ordre; il les diſtingue, & les compare plus aiſément: cette liaiſon les repréſente comme formant un ſeul tout, & par ce moyen l' homme ſe rend capable d'embraſſer un plus grand nombre d'objets par une ſeule vue de l'eſprit, en quoi conſiſte principalement la perfection de l' intelligence.

L' homme ne peut non plus rien exécuter, qu'en vertu d'un certain ordre, par lequel il diſpoſe les moyens d'une maniere convenable à la fin qu'il ſe propoſe. La raiſon a, pour ainſi dire, une double fonction dans l'homme, elle nous a été donnée pour développer les progrès de l'intelligence, & appliquer l'intelligence à l'action, & c'eſt toujours l'ordre qui la dirige ſous ce double rapport, en ſorte qu'on pourroit dire en un certain ſens, que comme le vrai eſt l'objet de l' intelligence, ainſi l'ordre eſt proprement l'objet de la raiſon. *Ratio eſt facultas ordinatrix.* C'eſt ainſi que quelques anciens ont défini la raiſon, & ſous ce point de vue on pourroit dire que le propre de la raiſon eſt de ſuivre l'ordre convenable des idées pour mettre un ordre convenable dans l'action.

Tout ordre, ou arrangement préſente une ſuite d' idées, ou de termes déterminés par un rapport commun. Ce rapport ſe trouve 1° dans les ſuites mathématiques indéfinies, telles que la progreſſion des nombres naturels, ou des nombres impairs &c.

Si je compare les deux termes 1 & 2, & que j'enviſage de combien le ſecond terme excède le premier, ce rapport de différence me fait voir qu'après 2 je dois placer le 3, & ainſi de ſuite.

Si en comparant ces deux termes j'enviſage le rapport géométrique de l'un à l'autre, c'eſt-à-dire que le ſecond contient deux fois le premier, la continuation de ce rapport m'avertit, qu'après le 2 je dois placer le 4, enſuite le 8, & ainſi de ſuite.

Ces ſéries ſont ſansdoute ordonnées, mais, comme elles ſont indéfinies, l'eſprit ne peut jamais ſaiſir la totalité des termes dont elles ſont ſuſceptibles; il ne ſauroit jamais en embraſſer tout l'enſemble d'une ſeule vue, & delà vient que cet ordre, pour ainſi dire, indéterminé, ne ſauroit le ſatisfaire pleinement.

2° Pour déterminer l'ordre qui réſulte des ſimples rapports de quantité, il faut conduire la ſuite juſqu'à un certain point, & enſuite, par des rapports réciproques ou rétrogrades la ramener de l'autre côté au même terme dont on étoit parti.

Soit une ſuite de termes *A. B. C.* dont une raiſon quelconque détermine l'excès de *B.* ſur *A.*, & de *C.* ſur *B.* Cette ſuite continuant à croître iroit à l'infini; & jamais l'eſprit ne pourroit en embraſſer la totalité.

Mais ſi l'on la continue de l'autre côté par une ſuite de rapports inverſes, on aura les termes *D.*, & *E.* qui répondront exactement aux termes *A.*, & *B.* la ſuite ſera ainſi terminée; l'eſprit en ſaiſira la totalité, & la correſpondance des termes *A.*, & *E.*, *B.*, & *D.*, relativement au terme du milieu, préſentera une raiſon claire, & déterminante de leur poſition, en quoi conſiſte l'idée de l'ordre. Voilà pourquoi la correſpondance des termes, d'où nait la ſymmétrie plait naturellement à l'eſprit. Et c'eſt auſſi la raiſon de cette regle générale, que lorſqu'il

1 I I   1 I I I 1
A. B. C.   *A. B. C. D. E.*

y a deux parties ſemblables, & une diſſemblable, il faut placer la diſſemblable au milieu; regle puiſée dans la nature même qui nous en offre des modeles, ſurtout dans la conformation des animaux.

Tout aſſemblage de moyens propres à produire un effet convenablement au but que l'on ſe propoſe, forme un tout ordonné; dans cette ſorte d'aſſemblages l'ordre réſulte du rapport des moyens à la fin; & c'eſt même cette eſpece d'ordre qui nous affecte le plus vivement.

En ce genre l'ordre le plus parfait eſt celui qui réſulte d'une combinaiſon de moyens propres à produire l'effet déſiré le plus *facilement*, le plus *ſûrement*, & le plus *pleinement* qu' il ſoit poſſible.

La facilité doit faire préférer l'ordre, par lequel on arrive au même but avec le moins d'appareil, & de complication de termes, & d' inſtruments; & la ſûreté même du ſuccès dépend en grande partie de la ſimplicité des moyens.

Soit une machine compoſée de dix pieces pour produire un effet qui peut être produit avec une machine de trois pieces, telle que Zabaglia les ſavoit imaginer: je dis que cette premiere machine multiplie les *termes*, ſans multiplier les *moyens*: elle multiplie les termes, puiſqu'elle en renferme un plus grand nombre; elle ne multiplie pas les moyens, puiſque les trois pieces dans l'autre machine font autant d'effet que les dix pieces de celle-ci.

Comparez le ſyſtême de Ptolomée avec l' hypotheſe de Copernic. Il s'agit d'expliquer le cours apparent des Aſtres. Les ſimples rapports de viteſſe, & de diſtance ſuffiſent dans le ſyſtême de Copernic pour ſatisfaire à toutes les apparences; dans le ſyſtême de Ptolomée il a fallu imaginer des cieux particuliers pour le mouvement propre de chaque planete, un premier mobile pour leur imprimer un mouvement commun en ſens contraire, des Epicycles pour expliquer les ſtations, & les rétrogradations. La machine

eſt beaucoup plus compoſée, & n'explique rien de plus : elle explique même moins : car dans ce ſyſtême il n' eſt pas poſſible d'expliquer, comment Mars eſt quelques fois plus proche de la terre, que le ſoleil ; ni comment Vénus, & Mercure ſe trouvent en oppoſition avec le ſoleil, ayant la terre entre-deux.

On voit par cet exemple comment il arrive de multiplier les termes, ſans multiplier les moyens. Ce défaut de ſimplicité vient toujours d'un défaut de lumieres. Si une ſeule idée intermédiaire ſuffit pour lier deux idées extrêmes, l'eſprit qui apperçoit la liaiſon des deux extrêmes par le moyen de cette ſeule idée intermédiaire ne rejettera pas la lumiere qui vient le frapper, pour chercher cette liaiſon par des détours qui en rendroient la connoiſſance plus pénible, & moins claire. L'eſprit ne prend cette peine que pour ſuppléer à cette idée moyenne qui lui épargneroit tous ces embarras, & le conduiroit plus directement au but qu'il ſe propoſe. Je pourrois éclaircir cette penſée par l' exemple des différentes démonſtrations que différents Auteurs ont données de certaines propoſitions de géométrie, dont les uns vont directement au but par une, ou deux idées moyennes adroitement ménagées, & les autres n'y parviennent que par de longs circuits qui rendent la démonſtration moins claire, & plus fatiguante.

L'ordre le plus avantageux eſt donc celui qui renferme le *maximum* des moyens avec le *minimum* des termes. C'eſt par le moyen d'un tel ordre qu'on obtiendra la fin qu'on ſe propoſe le plus *facilement*, le plus *ſûrement*, & le plus *pleinement* qu'il eſt poſſible. Un tel ordre eſt le plus conforme à l'intelligence la plus éclairée dont la perfection conſiſte à ſaiſir les rapports qui lient le plus immédiatement les différentes idées. Il a donc en ſoi une raiſon de préférence ſur tout autre ordre, & il eſt en conſéquence l'ordre le plus parfait en ce genre.

L'ordre qui résulte de l'arrangement, ou de la combinaison des moyens relatifs à une fin donnée, peut encore se combiner avec l'ordre de symmétrie dont nous avons parlé ci-dessus.

Dans toute combinaison de moyens il y a une piece qu'on peut regarder comme la principale, & dont l'action doit régler le jeu de toutes les autres ; ou, pour envisager la chose d'une vue plus générale, il y a dans toute combinaison de moyens, comme un centre où tous les efforts de toutes les différentes pieces vont se réunir. Les moyens, ou termes peuvent donc être tellement disposés relativement à ce point, que leur position forme une correspondance de symmétrie, telle qu'on la découvre dans un arrangement où la position de deux termes semblables est déterminée par leur correspondance avec le terme dissemblable qui est entre-deux.

Dans une suite ordonnée indéfinie les termes s'éloignent de plus en plus les uns des autres ; mais l'ordre qui résulte de l'arrangement d'un certain nombre de moyens relativement à une fin donnée exige que les termes se rapprochent pour agir de concert. La meilleure maniere de les rapprocher étant bien connue détermineroit peut-être une correspondance de symmétrie dans la position des termes qui, en qualité de moyens, doivent concourir le plus avantageusement à la fin donnée. Du moins nous en voyons des modeles dans l'organisation des plantes, & des animaux.

Cette correspondance de symmétrie, en liant les parties par des rapports plus marqués, en forme un tout plus régulier, j'oserois prèsque dire, plus identique, & dont l'esprit saisit l'ensemble avec plus de facilité. Peut-être, est ce là le fondement du Rythme poëtique, & de la cadence oratoire. La pensée la mieux conçue est celle qui présente avec plus de forçe, & de clarté l'ensemble des idées qui

la composent. Il faut donc qu' il y ait le plus parfait accord possible entre ces idées ; & cet accord marqué par les expressions qui doivent frapper l'oreille formera un nombre, un rythme, une consonance, d'où resultera l'harmonie.

On ne doit pas être surpris de remarquer une si grande diversité de jugements dans l'application que font les hommes de l' idée de l'ordre aux différents objets qui se présentent à leur considération. Cette diversité vient de plusieurs causes 1° Du défaut de connoissance. Présentez le rouage de la machine la plus ingénieuse à un sauvage ignorant, il ne verra qu'un amas confus de pieces dans un assemblage qui fera l'admiration d'un artiste. C'est que le sauvage, ne connoissant pas la raison déterminante de la position des pieces qui composent la machine, elles ne réveillent aucune idée d'ordre dans son esprit. Une oreille grossiere est peu touchée de la musique la plus harmonieuse. Le *sensorium* faute de délicatesse, ou d' habitude ne distingue point assez les tons qui se succedent, & ne peut par conséquent saisir le rapport qui les réunit pour en former un accord.

2.° Delà suit que si le nombre des pieces qui entrent dans un accord quelconque est trop grand, l' esprit, ou l'œil peu exercé ne saisira pas tout d'un coup tous les rapports de ces différentes pieces; cet assemblage paroîtra donc confus, jusqu' à ce que l'esprit ayant acquis peu à peu la connoissance de ces différents rapports parvienne enfin au point d'en saisir l'ensemble & de se représenter d'un seul coup d'œil l'ordre qui regne dans tout l'assemblage.

3° Dans les choses qui sont susceptibles de différents arrangements il y a sansdoute un ordre préférable à tout autre ordre. C'est toujours le plus simple, & celui néanmoins, qui suppose le plus d' intelligence. Une bibliothéque présente des livres arrangés suivant une certaine mé-

thode

thode. Cet arrangement applaudi par les uns ſera blâmé par un homme plus intelligent qui aura en vue un ordre plus convenable. Ce n'eſt pas que la premiere diſpoſition ſoit blâmable comme abſolument mauvaiſe en elle-même ; car tout homme conviendra qu'elle eſt toujours préférable à un tas confus de livres qui ſeroient amoncelés au hazard l'un ſur l'autre. Ce blâme n'eſt donc que relatif, c'eſt-à-dire qu'on blâme l'arrangement actuel d'une bibliothéque en tant qu'excluſif d'un ordre plus convenable qu'on auroit pu lui donner. Et par un abus commun du langage on donne le nom de mauvais à ce qui n'eſt réellement que moins bon.

L'ordre eſt le fondement du beau ; mais le beau dans ſa ſignification ordinaire ajoute à l' idée d'un ordre quelconque, celle d'une perfection, & d'un agrément particulier qui donne un plaiſir mêlé de ſurpriſe, & d'admiration. Delà vient qu' il eſt difficile de fixer dans l'échelle de l'ordre le dégré où doit commencer la dénomination du *beau*. Ce dégré devant être celui où la régularité de l'objet commence à exciter un mouvement de plaiſir mêlé d'une ſorte d'admiration, il eſt aiſé de ſentir, que ce dégré doit être différent relativement aux différents dégrés d' intelligence, aux différentes diſpoſitions, & même aux différentes habitudes de ceux qui en ſont affectés. L' idée du beau eſt une idée complexe du genre de celles que Loke appelle des modes mixtes, qui renferme une idée de régularité dans l'objet, & une idée de plaiſir, & d'admiration cauſée par la vue, ou la perception de cet objet.

La dénomination du beau dans le langage vulgaire ſera donc ſujette aux mêmes abus, & aux mêmes inconvénients que toutes les autres dénominations des modes mixtes ; abus ſur leſquels Loke inſiſte beaucoup dans ſon Eſſai ſur l'entendement humain. Si un objet paroit revêtu d'une

qualité brillante qui cauſe de la ſurpriſe & du plaiſir, on le nommera *beau,* quoique toute la régularité de l'ordre ne s' y rencontre pas. Au contraire, ſi à la régularité d'un objet ſe trouve jointe une qualité qui bleſſe, & qui étouffe le ſentiment de plaiſir que la ſeule régularité feroit capable de réveiller, cette régularité ſeule ne ſuffira pas pour qu'on lui donne le titre de *beau.*

La variété du langage, & des opinions au ſujet du beau, ne prouve donc point qu' il n' y ait rien de réel dans l'idée du beau, & qu' elle ne ſoit qu'un effet capricieux, un phantôme du préjugé, & de l'éducation; il eſt conſtant qu' il y a un ordre réſultant du rapport des choſes, & par conſéquent fondé en nature: que l'ordre eſt un objet de l' intelligence, & de la raiſon: que l'ordre connu eſt propre à exciter un ſentiment d' approbation, & de complaiſance: que dans les différents ordres, ou arrangements qui réſultent de différentes combinaiſons, il y en a de plus parfaits les uns que les autres: que dans cette échelle de l'ordre il y a un dégré où l'ordre connu excite un ſentiment de plaiſir mêlé de ſurpriſe, & d'admiration: que ce dégré doit être different relativement aux différentes diſpoſitions de ceux qui en ſont affectés. Ces principes ſuffiſent pour déterminer ce qu' il y a de réel, & de conſtant dans la dénomination du beau, & pour démêler en même tems le cauſes des différentes applications que l'on en fait aux différents objets.

EXAMEN PHYSICO=CHIMIQUE

Sur la couleur des fleurs, & de quelques autres ſubſtances végétales.

PAR M.^r LE COMTE MOUROUX.

PREMIÈRE PARTIE.

Si l'étude de la nature a augmenté le nombre des connoiſſances humaines, ſi elle a diſſipé une foule d'erreurs, & déchiré le voile de la préſomption, & de l' ignorance, nous en devons la principale obligation aux progrès, que les Mathématiques ont fait dans nôtre ſiécle : la préciſion, & l'ordre qu'elles inſpirent ayant paſſé dans les autres ſciences naturelles, elles ont fait naître cet eſprit méthodique par lequel on examine un Phénoméne, un fait d'une maniére ſimple, & naturelle, & l' analiſe qui en réſulte eſt toujours claire, & conſtamment enchaînée aux loix invariables de la méchanique, & de la phiſique: ainſi nos obſervations combinées deviennent une ſource preſque inépuiſable de principes vrais, & féconds.

La chimie qu'on peut regarder aujourd'hui comme une des branches les mieux cultivées de la phiſique y a répandu un grand jour, & la facilité, qu'elle donne à décompoſer les corps, & à les récompoſer nous fournit journellement des applications utiles pour les arts, & métiers, & nous ne négligerons pas d'obſerver qu'on arrive par ſon moyen à imiter parfaitement bien des productions naturelles, telles que le cinnabre, les ſafrans, le verd-de-gris, le ſouffre, les ſels, les ochres, les chaux métalliques, & nombre d'autres, qu'on pourroit apporter pour preuve, & qui nous démontrent que la nature, quoique très-ſou-

vent impénétrable à nos yeux, agit cependant toujours d'une manière ſimple, & par des loix univerſelles.

Cela poſé ne doit-on pas croire autant de ſimplicité, & de généralité dans les loix, ſuivant leſquelles ſe fait la végétation, & ſe produiſent les couleurs dans les fleurs, & dans les fruits? Pluſieurs Auteurs célébres nous ont enſeigné par quelle mécanique s'opéroit l'accroiſſement des plantes, & ont cherché à dévélopper d'une manière ſiſtématique leur génération; Ce n' eſt qu'en paſſant, & d'une manière aſſez imparfaite, que quelqu'un d'entr'eux a parlé des couleurs des végétaux, & quoique cet objet ne paroiſſe que de ſimple curioſité, j'eſpére néanmoins, que mes recherches pourront réunir l'agréable à l'utile; C'eſt du moins le but, que je me propoſe.

On ne doit pas s'attendre à un ordre bien rigoureux dans une matière ſi vaſte, & je ne donnerai mes obſervations, que dans l'ordre, ou pour ainſi dire elles ſont nées, & c'eſt à la conſidération attentive, que je fis ſur la vivacité de la couleur d'une fleur, que je me déterminai à en chercher la cauſe, de même qu' à m'aſſurer, ſi ces couleurs ſont inhérentes ou accidentelles.

Les Botaniſtes s'accordent à donner le nom de fleur à cette partie de la plante, qui ſe diſtingue ordinairement des autres par des couleurs particulières, & qui eſt deſtinée à garder les organes de la génération; tel eſt le ſentiment de Vaillant, Ray, Juſſieu, Tournefort, & enfin de la plus grande partie des Botaniſtes, mais ils ne ſont pas allés plus loin dans leur recherches ſur ce qui a rapport à la couleur.

Géofroi entre un peu plus en matière, & prétend que les huiles eſſentielles des plantes pendant qu'elles ſon renfermées dans les fleurs peuvent leur procurer differens mélanges par cette variété de couleurs, qu'elles poſſédent;

(1) il appuye enſuite ſon ſentiment ſur ce qu'une ſeule, & même huile, ſavoir celle du Thim combinée avec différens mélanges d'eſprits acides, volatils, urineux &c., lui a donné toutes les nuances des couleurs depuis le blanc juſqu'au noir; mais la renoncule, le cianum, ou bleuet, la gonfrena globoſa, qui ne contiennent certainement pas d' huile eſſentielle, & auxquelles on ne ſauroit rien déſirer pour l' éclat, & la vivacité de la couleur paroiſſent faire une grande exception à la généralité de ce ſentiment.

Le célébre Halles fut le premier à éclairer la partie de la phiſique qui regarde la végétation, mais occupé ſurtout à démontrer, que l'air eſt néceſſaire pour l'accroiſſement des plantes, & à en meſurer la force en repétant les expériences du célébre Boyle, il n'a pas examiné la partie, qui concerne la couleur des fleurs: il dit cependant (2) au chapitre ſeptième de ſa ſtatique. „ Comme le gout „ exquis des fruits, & l'odeur agréable des fleurs viennent „ des principes aëriens ſubtiliſés, il eſt aſſez naturel de „ penſer que les belles couleurs de ces mêmes fleurs doi- „ vent auſſi être attribuées à la même cauſe; car on ſçait „ d'ailleurs, que le terrein ſec favoriſe plus le jeu, & „ contribue plus à la variété de leurs couleurs, que les „ terreins humides, d'où elles tireroient plus de nouriture „ aqueuſe; mais je demande p.° que l'on m'explique quels ſont ces principes aëriens ſubtiliſés, en ſecond lieu que l' on me donne raiſon des fleurs très-bien colorées qui croiſſent dans l'eau; il dit enſuite que les plantes méridionales contiennent une plus grande partie de principes ſubtils aromatiques que les ſeptentrionales, parceque celles-là tirent ſansdoute plus de roſée, que celles-ci, choſe, qu' il ne prouve non plus que la première.

(1) Mémoires de l'Accadémie des Sciences de Paris an. 1707.
(2) Halles ſtatique de Végétaux cap. 7 p. 277.

L' illuſtre Duhamel (3) qui par ſes travaux a beaucoup répandu de lumière ſur le mécaniſme de la végétation n'a non plus que les autres recherché la cauſe de la variété, & des nuances des couleurs des fleurs ; il en a d'ailleurs obſervé très-attentivement la ſtructure ; il parle à la vérité des plantes moins colorées, & malades, que l'on nomme étiolées, dont je parlerai plus bas.

Becher (4) & Sthal (5) ont penſé, que la couleur verte des plantes fût produite par le fer, puiſque l'on ſçait, que des cendres des plantes l'on a retiré du fer, comme Lemery l'a demontré. (6) Becher a même penſé, que le verd étoit la deviſe du regne végétal, ou la caractériſtique, comme il la demande ; car quoique cette couleur diſparoiſſe pendant la deſſication, & la combuſtion des végétaux, elle ne laiſſe cependant pas de reparoître après la vitrification, & c'eſt pour cette raiſon, que le verre végétal pour le nommer ſelon Becher n'eſt pas beaucoup propre à être employé lorſqu' il eſt tout pur tenant beaucoup du verdâtre, outre qu' il ſe décompoſeroit fort aiſément, contenant une trop grande quantité d'alkali déliqueſcent. Ces illuſtres Auteurs cependant ne ſont pas entrés dans le détail de la culture des fleurs.

L' immortel Henchel, que j'aurai lieu de citer avec admiration, par ſes illuſtres découvertes ſur l'analogie du régne végétal avec le minéral, s'eſt cependant laiſſé entraîner à douter par rapport à la couleur verte des plantes, il me paroit qu' il étoit plutôt porté à l'attribuer au cuivre, voici ſes termes. (7) „ Ne pourroit-on point à la vüe

(3) Phiſique des arbres.
(4) Phiſica ſubterranea.
(5) *Sthalii fundamenta chymiae dogmatico-rationalis &c. Tom. II.*
(6) Mémoires de l'Accadémie des Sciences de Paris au 13 novembre 1706 p. 411.
(7) Henchel flora ſaturniſans chap. 11 p. 214.

„ de ce verd, qui eſt fixe au feu inférer, que cette cou-
„ leur tire ſon origine d'un mixte minéral, & que le
„ cuivre a de l'affinité avec le régne végétal? (8).

Au reſte la manière vague, dont il s'exprime, fait aſſez connoître qu'il n'eſt pas bien décidé, car il admet d'avoir retiré lui même du fer des cendres des végétaux, & il avoüe, que perſonne n'eſt jamais parvenue à en retirer du cuivre.

Il ne paroit guère plus décidé ſur la nature de ces couleurs, ſavoir ſi elles ſont accidentelles, ou ſixes, & inhérentes. Voici ce qu'il en dit en des endroits différens pag. 214. chap. 11. „ Il eſt conſtant que des couleurs
„ fixes de cette nature ne ſont point accidentelles, com-
„ me celles qui ſont produites par la reflexion, & refra-
„ ction, mais elles ſont ſi réelles, & ſi eſſentielles, qu'el-
„ les conſtituent, ou du moins contribuent à conſtituer
„ les corps.

„ Les couleurs dit-il, (pag. 256 chap. 15) des corps na-
„ turels ont une propriété, que nous ne pouvons venir
„ à bout de connoître par le moyen de nos yeux, il faut
„ donc que cette qualité ſoit quelque choſe de bien par-
„ ticulier, puiſque elle fait l'objet le plus eſſentiel de
„ nos ſens; en effet il faut qu'il y ait réellement des
„ cauſes, & des circonſtances bien délicates, qui faſſent
„ que certaines fleurs ont différentes couleurs, que la cou-
„ leur ordinaire de quelques autres change, & qu'elle peut
„ même être changée artificiellement.

„ Qu'on me diſe maintenant, que la couleur eſt un
„ caractère eſſentiel dans les plantes, puiſque ce caractère

(8) Nous obſerverons cependant, que cet argument n'eſt pas excluſif, car le vitriol martial, dont la couleur eſt verte n'eſt cependant autre choſe, que le réſultat de la combinaiſon de l'acide vitriolique avec le fer.

„ eſt ſujet à tant de variations. Mais quand il ſeroit fixe, „ qu'on m'apprenne quelle en eſt la ſource, quels moyens „ nous avons pour la découvrir ; en un mot les couleurs „ ſeront produites ſans que nous ſachions comment elles „ varient, & ſe perdent ; comment pouvons nous com- „ pter ſur elles, comment pouvons nous comparer la „ couleur fugitive de la celidoine avec la couleur fixe de „ l'or?

Après avoir ainſi expoſé ce qui a été dit, & fait par ces illuſtres Savans ſur les fleurs, & ſur leurs couleurs, & après avoir donné la définition généralement adoptée ſur ce qu'ils entendent par fleur, nous allons paſſer à une conſidération préliminaire, qui dépend de l'Analiſe chimique, qui en a été faite.

L'Analiſe des végétaux ſelon Halles ſe réduit à cinq principes, qui ſont

Le ſouffre,

Le ſel volatil,

L'eau,

La terre,

Et l'air.

Dans cette Analiſe tous les élémens de la nature ſont en jeu, de façon, que ceci ne nous éclaire pas beaucoup ; je trouve plus ſenſé ce qu'en dit M. Rouelle, ſavoir,

Que la partie colorante verte des plantes eſt d'une nature réſineuſe, puiſque elle ne ſe laiſſe extraire que par l'eſprit de vin, mais, que la partie colorante de leurs fleurs eſt *extracto réſineuſe* étant également ſoluble dans l'eau, & dans l'eſprit de vin ; il eſt vrai cependant que ce dernier les altére à raiſon de l'acide qui entre dans ſa combinaiſon ; il y a d'autres parties colorantes qui ne ſont ſolubles, que dans l'eau, & qui par conſéquent ſont purement extractives, telle eſt la partie colorante de la terra merita, ou de la racine de curcuma ; l'art. de la

teinture

teinture consiste à enlever cette partie colorante au moyen d'un acide, ou d' un alkali, & de le précipiter ensuite avec un alkali, ou un acide; il a reconnu neuf principes dans les végétaux, que je laisserai de décrire, parceque il avouoit lui même qu'on pouvoit encore en reconnoître d'autres.

La plus part de ceux, qui ont examiné les végétaux se sont contentés de parler des huiles essentielles, des sels, comme des principes plus connus; il est certain cependant, que l'on reconnoit dans les plantes différens mixtes de même que dans les fleurs. Nous en avons un exemple dans la fleur du grand soleil, appellée *corona solis*, qui fournit une grande quantité de nitre outre une partie d'alkali fixe; l'on retire du vin le sel de tartre; de certaines plantes, & fleurs un alkali volatil comme dans les cruciféres, l'on retire des esprits de certaines autres; l'on a retiré du fer des cendres de quantité de plantes, & surtout du chéne; du génet l'on en a retiré de l' étain, & si nous en croyons les Chinois l'on a retiré du mercure du pourpier sauvage. (9)

Enfin ces principes ne sont pas encore bien analisés, car l'on parvient à reconnoître différens principes selon la manière qu'on traite les végétaux que l'on analise, comme il est aisé de le voir dans les cendres des plantes obtenues, ou à l'air libre, ou à la façon de Takenius, dont les unes nous donnent un alkali fixe déliquescent, & les autres des sels fixes.

L'on doit cependant remarquer, que le principe colorant a beaucoup d'affinité avec les sels; l'expérience que fit Boherave nous le démontre, puisque ayant fait bouillir

(9) Lettres édifiantes récueil 22 lettre du Père Dentrecolles p. 457, & suivan.

une branche de romarin vingt fois, & plus, il ne lui resta plus aucune couleur, & ayant ensuite brulé cette même branche, il n'en retira plus aucun sel.

Je fis la même expérience sur différentes fleurs, qui après avoir bouilli quantité de fois, ne resterent plus aucunement colorées, & je n' obtins aucun sel de leurs cendres.

Nous avons une autre preuve de l'affinité de la partie colorante avec les sels dans la méthode, dont on se sert pour retirer la laque des végétaux, qui se fait au moyen d'une forte lessive de sel de potasse, & de chaux, & par ce moyen la couleur des fleurs est entièrement enlevée par les sels.

Si l'air est nécessaire pour l'accroissement des plantes, il l'est de même pour les fleurs, puisque l'on voit, que lorsqu'on expose des fleurs fraiches sous la pompe pneumatique elles se fanent, & perdent en partie leurs couleurs naturelles; Boile la croit aussi nécessaire pour développer la couleur.

Quant à la terre nous savons qu'elle contribue autant à la végétation que l'eau, qui attenuant les sels, & les parties les plus subtiles de la terre sont portées dans les vaisseaux capillaires des plantes par l'action de l'air, & que la terre qui est plus ou moins chargée de sels contribue à l'accroissement de la plante plus ou moins rapide.

Le Phlogistique est surément une des parties les plus essentielles des plantes, & il l'est de même des substances métalliques. Henchel en fait une de ses plus fortes preuves pour l'analogie qu' il a démontrée entre les végétaux, & les minéraux; que si dans le régne minéral il donne le dernier dégré de perfection (10) aux terres métalliques, pourquoi ne donneroit-il pas la perfection aussi aux plantes,

(10) Henchel flora saturnisans pag. 196.

& aux fleurs. Baumé eſt d'après Stahl (*) de ſentiment, que le phlogiſtique ſoit le principe des odeurs, & des couleurs. (11)

M. Pott ne fait aucune diſtinction dans ſa lithogeognoſie entre le phlogiſtique, & la couleur, bien ſouvent il les prend pour ſynonimes, comme parlant ſur la terre gypſeuſe, il dit qu'elle contient auſſi un peu de phlogiſtique, ou principe colorant (12), quelque fois il la nomme matière ſulfureuſe, ou colorante, beaucoup volatile.

M. le Comte Saluces penſe de même que le phlogiſtique eſt abſolument néceſſaire pour développer la couleur des parties qui la contiennent, comme il le prouve par un grand nombre d'expériences qu' il a fait à ce ſujet.

Si M. Pott nous a enſeigné une manière ſure d' analiſer les corps les plus durs, tels que les métaux, & les pierres par le moyen d'un feu violent, qui en les décompoſant nous en montre les principes; il eſt choſe très-ſure que l'on ne doit non plus s' écarter de cette méthode pour parvenir à connoître les vrais principes dans les fleurs; c'eſt à l'aide de ce menſtrue, que je ſuis venu à bout de reconnoître le principe qui conſtitue la couleur; perſonne je crois avant moi ne s' eſt ſervi de cette méthode pour les fleurs, comme il eſt aiſé de voir dans la 2e partie (13). Je commencerai en attendant par rapporter un nombre d' obſervations, qui me laiſſoient ſoupçonner que la lumière pût contribuer à la couleur des fleurs.

(*) OEdipus Chym. pag. 97 & ſuiv.
(11) Manuel de chimie pag. 47.
(12) Lithogeognoſie tom. 1 p. 66.
(13) Le même M. Pott ne croyoit pas, que ces couleurs végétales fuſſent dans le cas de ſoutenir un feu violent, car dans l'analiſe, qu' il fait de la terre colorée que on apelle de Scuttgelb il dit qu'elle n'eſt point minérale, & qu'elle n'eſt qu'une compoſition artificielle, c'eſt-à-dire, une eſpéce d'argille que l'on colore avec la décoction de l'écorce de bouleau, ou des feuilles de tillieul &c.,, l'examen de ces couleurs par ,, le feu nous fait voir ce que je viens de dire, car en les calcinant ,, on leur fait perdre cette couleur, qui eſt végétale. (Lithogeognoſie Tom. II. pag. 68.)

OBSERVATIONS.

I

Si l'on confidére les fleurs à calice, lorsqu'elles font prêtes à éclore, ordinairement l'on n' y voit du premier moment que du blanc, elles commencent à prendre de la couleur lorfqu'elles s'ouvrent jufqu'à ce que éclofes à leur point de perfection, elles aquierent le plus grand dégré de couleur, cependant les pétales qui font immédiatement couverts par le calice reftent prefque entièrement fans couleur pendant le tems qu' ils font couverts, fur tout fi le calice eft d' une texture forte, comme on a lieu plus particulièrement d'obferver dans les œillets; c' en eft de même prefque de toutes les autres efpéces de fleurs, qui n'ont point de calice, les parties qui font à l'abri de la lumière font les dernières à fe colorer, & ne prennent que très-peu de couleur fi elles ne parviennent à la voir.

I I

Si l'on examine la plus grande partie des fleurs colorées, qui ont quantité de pétales (celles qu'on nomme doubles) quoique dans leur point de perfection, ou de vivacité de couleur, on trouve en enlevant les petales les uns après les autres, que ceux qui font tout-à-fait couverts font toujours d'une nuance plus tendre.

I I I

L'onguis, ou la partie qui eft immédiatement attachée au calice eft tout-à-fait blanche, ou un peu verdâtre, cette différence fe montre évidemment dans l'artichaut, & fi l'on remarque quelque couleur plus foncée à la bafe du

pétale, elle eſt ordinairement due aux neſtaires, dont les glandes ſéparent une humeur ſingulière, qui probablement a reçu ſa concoction ailleurs; on peut de même obſerver les différentes nuances dans le verd, ſelon que les parties ſont plus ou moins couvertes; la plus grande partie des feuilles des arbres, des arbuſtes, des plantes, & des herbes nous montrent leur face expoſée au ſoleil d' une couleur plus foncée, que le revers, qui eſt au contraire d'un verd plus tendre, (14) & on obſerve aſſez généralement auſſi, que les plantes, dont les feuilles ont une ſeule face tomenteuſe, ou blanchâtre, cette face eſt preſque toujours l' inférieure, ou la moins expoſée aux rayons du ſoleil.

I V

Il en eſt de même de la plus grande partie des fruits, car la partie qui eſt couverte reſte preſque ſans couleur, & au contraire celle qui ne l'eſt pas, eſt merveilleuſement colorée; ſi ces fruits jouiſſent au ſurplus de la vue immédiate du ſoleil, la face expoſée au midi eſt ſurément plus colorée que celle au Nord, qui ne l'eſt preſque point, ce qu' il eſt très-aiſé de voir dans preſque tous le fruits, & plus particulièrement dans les péches.

V

J'obſerve enſuite, que ſi on coupe tous les noyaux des fruits, les amandes, les pignols, la noix, la noiſette, tous les pepins des poires, des pommes, & des autres

(14) Cette différence de couleur dans les revers des feüilles ne s'apperçoit pas encore toujours dans le mois d'avril, mais elle commence à être ſenſible à la fin de mai, lorſque le ſoleil commence à avoir plus de force, & cette différence s'obſerve encore plus tard dans les montagnes.

fruits on les trouve blancs de même que les graines de mélons, de courges, de concombres, qui donnent des émulſions très-blanches. Enfin les ſémences, & les graines dans la partie intérieure ſe manifeſtent blanches, comme le bled, l'orge, le riz en fourniſſent encore une preuve: & comme l'on a toute la raiſon de croire, que dans cette partie blanche des ſemences toute la plante y ſoit en petit pour ſe former enſuite, & devenir une plante complette, ne pourroit-on pas ſoupçonner avec raiſon qu'originairement la couleur blanche eſt propre à l'embrion, ou à l'enfance de toutes ces plantes, & que ſi elles aquierent avec le tems d'autres couleurs, cela eſt du à d'autres cauſes extérieures, que je tâcherai d'éclaircir, & que je me permets en attendant d'attribuer aux rayons du ſoleil; en continuant ici ces reflexions, j'obſerve, que la partie interne des plantes eſt aſſez généralement plus blanche, que ne le ſont les parties extérieures.

V I

Les parties de la peau de quantité d'animaux, qui ſont les plus couvertes, comme ſous le ventre, dans les entrecuiſſes ſont d'une couleur moins foncée, que ſur le dos, quelque fois même blanches, comme on obſerve dans quantité de vaches noires, dans preſque toute la famille des cerfs, des dains, des chévres ſauvages, dans les caſtors, les renards, & dans les petits gris &c. Il en eſt de même des oiſeaux, comme dans l'Airon, la Bertavelle, l' Hirondelle, la Pie, les Tourterelles &c., le plumet ſous le ventre eſt toujours moins coloré, que celui du dos, & bien ſouvent blanc.

La plus part des poiſſons offrent un pareil exemple, comme l'on peut voir dans le ton, le ſpada, le hareng, le merlan &c., & dans la plus grande partie des rayes,

dans les poiſſons de mer, de même que dans la truite, dans le brochet, & dans quantité d'autres poiſſons d' eau douce.

L'on voit à peu-près la même choſe dans la vipére, dans quelques ſerpens, & dans les lezards.

L'examen des coquillages ſur-tout de ceux de la mer des Indes nous offrent un fait ſemblable.

La partie interne des coquilles à valves ſont preſque toujours d'un blanc émaillé, comme il eſt aiſé de le voir dans les huitres, dans les petoncles, dans les couteaux, & dans les pinnes &c.

V I I

Le celeri, la chicorée, le chardon nous préſentent un fait ſingulier, ces plantes vertes de leur nature, ſi on leur défend la lumiére en les couvrant avec la terre deviennent blanches, & l'on a donné différentes explications de ce phénoméne. Nollet (15) & Schaw (16) prétendent, que c'eſt la privation de l'air, qui ôte le verd à ces plantes enterrées. La laitue, & le choux nous montrent la même choſe, les feuilles les plus centrales ſont ordinairement blanches, & l'on voit par nuance du centre à la ſurface la couleur verte s'augmenter petit à petit; même ſi l'on obſerve avec attention, ce ſont les pointes des feuilles qui commencent à prendre de la couleur.

V I I I.

L'obſervation des plantes, que l'on nomme étiolées paroit appuyer ces reflexions. Ces plantes ſont attaquées d'une

(15) Leçons de phyſique tom. 5 pag. 441.
(16) Schaw. leçons de chimie.

maladie ſingulière, qui reſſemble beaucoup à celle que dans les hommes on nomme *rachitis*, ſelon Du-Hamel les branches de ces plantes s' allongent, la tige eſt petite, & ſans proportion, les feuilles petites, au lieu de la couleur verte, elles ſont plutôt jaunâtres. Si c'eſt un arbre fruitier, qui eſt attaqué de cette maladie, il porte les fruits à la vérité, mais fort petits preſque point colorés, qui ne parviennent jamais à maturité, faute de quelque choſe néceſſaire à ſon accroiſſement; l'on obſerve des plantes de cette nature dans des petites cours entourées de bâtimens fort hauts, & ſur tout ſi les dites plantes ſe trouvent expoſées au Nord. L'on obſerve la même choſe dans les herbes, qui croiſſent ſous quelque pierre, ou tuile très-peu élevées, ou dans les terres très-peu expoſées au ſoleil.

On a porté pour raiſon de ce phénoméne entre autres Du-Hamel (17) que la reſpiration de l'air étant génée, la plante ne peut avoir toute ſa nourriture, faute du mouvement que l'air y donne.

Je penſe qu'on pourroit auſſi en attribuer en partie la raiſon à ce que le ſoleil ne la viſite jamais, & delà il eſt clair, comment la couleur des différentes plantes varie ſelon le climat, & en preuve de cela il ſuffit de voir, que les plus célébres Botaniſtes conviennent avec M. Linneus que par des obſervations ſuivies faites ſur les lieux on parvient à diſtinguer par le port, & la couleur, p. ex. les plantes du Cap de bonne eſpérance, & des autres pays méridionaux des autres plantes Européenes; d'où il ſuit que le ſentiment de ces Botaniſtes, qui penſent, qu'il n'y ait pas dans la nature une telle multiplicité de véritables eſpéces de plantes, que l'on s' imagineroit d'abord, n' eſt point ſans appui, ſi on refléchit ſeulement à la variété des
cou-

(17) Duhamel phiſique des arbres.

couleurs, dont une grande partie eſt due à la variété du climat, & à l'endroit plus ou moins exoſé au ſoleil, & que pour cette raiſon la même plante, par exemple, de laitue devient rouge cultivée en plein jour en Sicile, & qu'elle perd ſa couleur étant cultivée dans nos jardins, de même que pluſieurs autres eſpéces de plantes, qui par ces ſeules variations deviennent méconnoiſſables aux Botaniſtes plus éclairés.

Malgré toute la variété qui s'offre dans les couleurs des plantes relativement aux différens climats, on ne laiſſe cependant pas d'obſerver une certaine conſtance dans ces couleurs, & par là on conçoit, que ce n'eſt pas ſans raiſon, que le célébre M. Adanſon a établi ſon neuvième ſiſtème des plantes fondé ſur les couleurs.

Cette différence de couleurs relativement au climat, n'a pas lieu ſeulement dans le régne végétal; nous la voyons de même dans le regne animal, puiſque dans les pays où il fait extrêmment froid, comme en Moſcovie, en Pologne, les ours, les loups, & les renards, qui en hiver ſont blancs, ſont rouges en été, de même que les lièvres, qui dans nos hautes montagnes ſont colorez en été, ſont blancs en hiver, Monſieur de Buffon obſerve que les oiſeaux qui ont les plus vives couleurs dans leur plumage viennent dans les pays chauds. (18) Nous voyons cette différence auſſi dans quelques poiſſons, entre autres, au rapport de Rondelet (19), la Mendola, & le Picarel, qui en hiver ſont blancs, en été deviennent noirs, ou plutôt bigarés.

I X

Quant aux hommes, nous obſervons en général, que tous les negres, les olivâtres, les baſanés, les cuivreux ſe trou-

(18) Hiſtoire naturelle des Oiſeaux diſcours préliminaire p. 22 edit. in 4.
(19) Hiſtoire entière des Poiſſons pag. 34 & 134.

vent dans les pays chauds, que jamais l'on en a trouvé dans les pays froids, même nous ſavons que les Negres depayſés, & dans les climats froids blanchiſſent dans quelques années, & les Européens bruniſſent dans leurs climats chauds, mais je me contenterai de rapporter encore ici une obſervation qui tient toujours à l'action du ſoleil, & de la lumière ſans entrer à diſcuter les opinions des Savans ſur ce qui fait la couleur des Negres, & c'eſt que ces hommes ont la plante des pieds auſſi blanche, que les Européens. (20)

Toutes ces obſervations combinées me portoient toujours plus à croire, que la lumière du ſoleil influë beaucoup ſur les couleurs des corps naturels, & particuliérement des végétaux, des fleurs, des fruits, & même des animaux; je cherchai par conſéquent de m'en aſſurer par des expériences.

Or le ſoleil peut agir de deux manières différentes en ſuppoſant les couleurs attachés à ce principe. 1.° comme fait le feu ſur les couleurs de la porcelaine, qui ne ſont que très-laides quand on les peint, mais qui aquierent le plus grand éclat lorſque le feu vitrifiant ces matières en développe la couleur; de même le ſoleil développant les principes analogues dans les fleurs, les reduiroit à cette beauté, qui fait l'ornément de nos jardins.

2° De voir s'il agit ſimplement comme lumière en introduiſant dans les parties des fleurs des principes colorants ſelon la diſpoſition des mêmes plantes à refléchir certaines parties de la lumière plutôt que des autres, & rapportant cela aux affinités des parties de la lumière avec les parties des corps en queſtion, effet ſemblable à celui que la

(20) Vojez l'Abbé Manet Hiſtoire de l'Affrique Françoiſe, & l'appendix des Mémoires de l'Academie Royale de Pruſſe Tom. II. art. VIII. p. 15.

lumière opére ſur le phoſphore de Bologne (21), ſur lequel l'on ſçait que le feu n' y a aucune action.

Il ne ſera pas au reſte inutile d'obſerver d'avance, que par l'analiſe on découvre, que les fleurs contiennent toute ſorte de ſels, & de parties terreſtres; c'eſt à ces deux principes que je m'arrête en tant que généraux, & je laiſſerai à part les autres que l'on ne peut pas regarder comme colorants; mais venons aux expériences.

Expérience première.

J'ai pris une forte tige de violier rouge, qui étoit plus foncée dans quelques endroits, & qui avoit des petites tâches auſſi de rouge foncé, & lorſqu'elle eut à peine formé les petits boutons, j'ai mis le pôt dans un endroit très-obſcur d'une chambre que j'avois préparée pour cela; j'ai eu ſoin de laiſſer prendre de l'air pendant la nuit à la plante, & je ne l'ai arroſée qu'une fois, le terrein s'étant maintenu aſſez frais; cette plante a beaucoup tardé à donner des fleurs, & je n'ai obſervé lorſqu'elle eſt écloſe preſque aucune couleur dans les pétales, c'eſt-à-dire, elle ne montroit qu'une couleur entre jaune, & verd, cependant on y diſtinguoit les tâches, quoique elles ne fuſſent pas autant foncées que dans celles qui végétoient en plein jour. J'ai cependant remarqué, que la plante avoit beaucoup ſouffert, & que le feuilles étoient fanées, jaunâtres, & qu'il en tomboit quelqu'une, que même de cinq ou ſix pointes boutonées il n'y en eut, que deux qui fuſſent écloſes, la plante mourut dans quelques jours.

D'autres plantes que j'avois auſſi mis dans l'obſcurité, mais qui étoient d'une tige un peu plus foible moururent

(21) *Commentaria Bononientia tom. 2 p. 20 Bartholomæi Beccari, De quamplurimis phosforis nunc primum detectis.*

ſans me laiſſer lieu de rien obſerver ; j'ai vu , que par cette méthode l'on pouvoit auſſi ſoupçonner la raiſon des plantes étiolées, ou malades , faute d'une libre reſpiration de l'air, & j'ai eu recours à l'expérience ſuivante.

Expérience ſeconde.

Entre pluſieurs plantes des mêmes fleurs de l'expérience précédente expoſées en plein air j'ai choiſi une tige aſſez forte, qui avoit déjà les boutons, mais avant qu'ils s'ouvriſſent j'ai couvert la pointe boutonnée d' une cloche de terre verniſée pour lui ôter la vue du ſoleil , la tige , & les feuilles jouiſſoient cependant de toute la lumière, & la reſpiration de la plante n'étoit preſque point génée; j'ai obſervé lorſque la fleur a été écloſe, que les pétales n'étoient que très-peu colorés ſur les bords, & un peu tâchés en rouge, comme j'ai eu lieu d'obſerver dans l'expérience précedente ; la plante n'en mourut pas.

Expérience troiſième.

J'ai choiſi une plante de violier cramoiſi foncé, qui a donné quantité de fleurs ; je les ai toutes coupées , & il en reſtoit ſeulement 6 à 7 boutons parfaitement fermés, & tout à fait verds , j' étois ſur de cette façon de la couleur des fleurs , j'ai fermé cette plante dans une caiſſe de bois couverte de toile cirée pour ôter entiérement la lumière, j'ai pratiqué en divers endroits de la caiſſe des trous , pour y faire circuler l'air : la plante me donna dans dix ou douze jours des fleurs qui étoient pâles tout-à-fait dans les pétales du centre, mais dans l'extérieur elles étoient de couleur de roſe fort tendre , & l'on obſervoit la même choſe dans tous les boutons qui étoient éclos ; la tige , & les feuilles vinrent d'un verd plus tendre auſſi.

J'ai tournè enſuite mes vües ſur un fait que tout le monde rapporte, & que la plus part des Auteurs (22) débitent, ſavoir, que la vapeur du ſouffre ôte entiérement la couleur aux fleurs ; j'ai voulu examiner la raiſon de ce phénoméne, que j'ai trouvé faux en partie, comme il eſt aiſé de le voir par les expériences ſuivantes.

Expérience quatrième.

Ayant mis du ſouffre dans un creuſet, que j'ai couvert d' un cone de papier, qui portoit à la pointe quattre ou cinq tiges de hyacintes bleues, & ayant allumé le ſouffre, après deux minutes ces fleurs devinrent tout-à-fait blanches, & dèpourvues de couleur, mais les ayant de nouveau expoſées à la vapeur du ſouffre, dix ou douze minutes après les ayant regardées, j'ai reconnu quelques taches rouges ſur la pointe des pétales ; je les ai laiſſé encore un bon quart d' heure & les pétales prirent une couleur rouge dans tout le contour de la largeur d'une ligne, & même plus dans quelque endroit. J'ai obſervé préciſément le même phénoméne dans les fleurs nommées *primula veris*, & *hyacintus moſchatus*, qui ſont d' un bleu de Roi très-foncé ; elles devinrent blanches dans les premiers momens, enſuite les extrémités ſe colorerent d' un beau rouge, comme dans les hyacintes que j'ai décrit.

Les violettes m' offrirent le même réſultat, ainſi que les fleurs de bleuette, de veronique, l' iris ſilveſtris &c., en deux mots toutes les fleurs bleues, & violettes que j'ai expérimentées me donnerent le même rèſultat.

(22) Henchel, Nollet, Schaw.

Expérience cinquième.

J'ai exposé de même à la vapeur du souffre pendant plus d'une heure de tems des violiers, des narcisses, & des roses jaunes, des levions des fleurs de genet & de farfara sans que leurs couleurs ayent soufert la moindre altération, & je suis bien aise de pouvoir assurer les curieux qu'on peut conserver par ce moyen la couleur aux fleurs jaunes quoique dessechées par l'acide sulfureux autant de tems que l'on voudra & avec la même vivacité qu'elles peuvent avoir au moment qu'on les détache de la plante : on me pardonnera j'espère cette transition en faveur de la nouveaute (23).

Expérience sixième.

La vapeur du souffre fit disparoitre dans peu de tems la couleur rouge des fleurs dont je m'étois servi, telles que les roses, les tulippes, les pavots, les fleurs de passion, les violiers, les œillets, &c. mais elles reprirent après quelque tems leur couleur naturelle, j'ose même dire avec plus de vivacité vers l'extremité, ou la pointe des pétales de la largeur à peu-près de quatre ou cinq lignes comme s'il leur étoit arrivé une éspéce de concentration des molecules colorantes vers cette partie. Il est bon de remarquer ici, qu'ayant essayé deux ou trois pointes de violiers rouges de cette plante qui avoit végété à l'obscur (expérience troisième) qui étoient à peine colorées d'un rouge tendre, cependant après avoir été quelque tems à la vapeur du souffre, la pointe des pétales se colora d'un rouge aussi vif, que celui des autres fleurs, qui avoient végété en plein jour.

(23) Transactions philosophiques.

Expérience ſeptième.

Ayant expoſé quantité d'eſpéces de feuilles vertes, des tiges, des branches, différentes herbes à la vapeur du ſouffre de la même façon que dans les expériences précédentes, la couleur ne changea jamais, elle s'eſt affoiblie quelque peu dans quelques unes, qui cependant reſterent viſiblement vertes.

Expérience huitième.

Toute eſpéce de fleurs blanches de différentes qualités, que j'ai expoſé à la vapeur du ſouffre, ne changérent aucunement, & l'on n'y pouvoit même appercevoir le moindre changement.

Par ce que je viens d'obſerver, je conclus que le ſouffre n'agit ſur les couleurs des végétaux que, comme font les autres acides minéraux, c'eſt-à-dire changeant en rouge le bleu, & le violet des végétaux, altérant un peu la couleur rouge, & n'attaquant pas ni la jaune, ni la verte.

Je dois enfin remarquer qu'en laiſſant expoſées à l'air libre ces fleurs après leur avoir fait ſubir cette tranſmutation, après quelque tems l'on reconnoit de nouveau quelque trace de la couleur primitive. Un fait digne d'obſervation c'eſt qu'ayant eſſayé ſur quantitè de plantes odoriférantes les mêmes expériences, la couleur étoit enlévée dans les premiers moments, mais l'on en ſentoit très-diſtinctement l'odeur : de façon que l'on peut conclure, que le principe odoriférant n'eſt pas attaché au colorant, qui doit avoir un autre principe tout particulier ; l'on peut très-aiſément s'en convaincre en faiſant des épreuves ſur les hyacintes, les violettes, & les roſes &c., & toutes les plantes qui ont une odeur aigüe, de même que ſur les fleurs blanches, car quoique celles-ci ne changent point

leur couleur naturelle, l'on ſent très-diſtinctement l'odeur de la fleur.

L'enſemble des expériences me confirmoit toujours plus dans l'opinion que j'avois formée, 1° que l'air eſt d'une néceſſité abſolüe à la végétation :

2° que le ſoleil contribüe au developpement des couleurs (*).

3° Que les fleurs contiennent des parties fixes qui donnent les couleurs, ce qui paroit encore confirmé par l'action de l'acide ſulfureux (pag. 29 & ſuiv.), & qu'on ne doit par les regarder comme un ſimple accident du tiſſû, qui produiſe une réflexion déterminée de la lumière.

4° Que tout bien conſidéré la queſtion de l' inhérence des couleurs peût être regardée comme indiférente & ſuſceptible d'arguments pour & contre, ſuivant la manière de l'enviſager : or nous allons continuer notre examen ſous le point de vüe ci-devant (corollaire 3) & nous attacherons à decouvrir principalement la nature des parties colorantes des fleurs.

(*) Je crois qu'on pourroit adopter ici les idées de M. Homberg ſur la lumière, qu'il regardoit comme le ſeul principe actif de tous les mixtes, & qu'il appelloit ſoufre principe. Voyes Mém, de l'Acad. des ſcien. pour l'an, 1705. pag. 89. & ſuiv.

SECONDE PARTIE

Les obsérvations & les expériences dont je viens de rendre compte, m'ayant rassuré sur les doutes qui s'élèvoient de toute part contre les idées que je m'étois faites sur la cause productrice des couleurs, sur la nature de cette cause, & sur les moyens dont se sert la nature pour les devélopper. Je me proposai d'enrichir autant qu'il seroit en mon pouvoir cette partie de la végétation du plus grand nombre de faits : après l'avoir envisagée sous un point de vüe botanique & physique je crûs ne pouvoir rien faire de mieux que de l'examiner d'une manière plus intime par les secours de la Chimie.

Quelques personnes aux quelles je communiquai mon projet ne crurent pas devoir m'y encourager, & je n'ai pas trouvé de motifs bien engageants dans les Auteurs que j'ai consulté : il étoit question de tenter si les couleurs des fleurs soutiendroient à la violence du feu de vitrification & si elles seroient propres à peindre le verre. M.r Pott Auteur de la Lithogeognosie dit formellement en plusieurs endroits que les couleurs végétales ne supportent pas le feu de vitrification. M.r Schaw assure la même chose, ainsi que le Baron d'Holbach dans ses notes sur Neri, & M.r de Montami enfin, qui dit en plusieurs endroits de son excellent traité de la peinture en Email que l'on doit rejetter toute sorte de couleurs animales, & végétales comme incapables de servir, ne me donnoient pas comme l'on voit de grands encouragemens.

Je communiquai mes idées à mon Ami M.r le Comte de Saluces à qui ces matières n'étoient pas neuves, & j'eus autant de plaisir alors de voir dans son livre de mémoires que je m'étois rencontré avec lui, de ce que j'en ai maintenant de lui en faire honéur ; Nous traitames quelque tems cet objet, & une argument qui nous parut

toujours decisif est celui que, les verres dont le fondant est un sel alkali végétal, sont toujours ve.ds ou verdatres, pendant qu'ils sont jaunes avec le plomb, pourpre avec l'or, bleuatres avec le cuivre &c., ainsi que l'ont remarqué plusieurs célébres Chimistes.

Or si les végétaux dont on retire le sel alkali pour l'usage des verreries après avoir soufert toutes les opérations qui sont néceſſaires pour être reduits en sel & après avoir essuyé le dégré de feu qui est néceſſaire pour mettre en fusion les matières vitrifiables, & pour s'y combiner dans l'état de vitrification, portent neantmoins cette teinte aux verres, pour quoi les fleurs, les racines &c. ne fourniroient elles pas jusqu'à un certain point leur couleur naturelle aux verres dans lesquels on les auroit employées après avoir été réduites en sel?

Nous ne savions pas voir de différence entre les parties d'une même plante pour être fondés à penser que les unes fussent composées de parties plus fixes que les autres: la delicatesse des couleurs ne nous autorisoit pas non plus à une telle supposition; de manière que le doute nous paroissoit assés fondé pour ne pas balancer plus long tems à tenter l'expérience, & jé m'y déterminai d'autant plus volontiers qu'ayant répété un grand nombre des expériences, dont Mr Henckel se sert pour prouver la grande alliance qu'il y a entre le régne végétal, & minéral je me trouvois aussi convaincu que lui des principes qui sont contenus dans son excellent ouvrage du *Flora saturnisans.*

La néceſſité d'un feu violent, & continuè m'engagea à profiter de celui des fourneaux de la verrerie Royale, nos essais ayant manqué dans le fourneau à vent du laboratoire de Monsieur le Comte de Saluces: J'aurois souhaité de reussir un verre purement végétal pour être à couvert de tout soupçon, ce qui est de la plus grande difficulté car non seulement on n'y parvient que

par un feu très-violent, mais ce verre tombe aiſément en déliqueſcence.

Pour remédier à cet inconvenient on acoûtume de le mêler avec quelque matière vitrifiable pour avoir un corps d'une plus grande dureté, cependant malgré cette combinaiſon ce verre eſt toujours verdâtre tenant à la matière végétale dont il a été compoſé, c'eſt-à-dire aux cendres de Kali, ou d'autres plantes; de façon que dans les fabriques l'on eſt dans l'uſage d'y joindre un peu de Magneſia, ou Manganeſe qui a la propriété d'éclaircir le verre, & de lui ôter la couleur verdâtre, ce qui l'a fait nommer par quelqu'un le ſavon du verre. Voyés l'ouvrage de M. Montami.

La fumée qui s'éléve des fleurs que l'on brûle pour les réduire en cendre eſt ſi diſtinctement colorée de la couleur de ces mêmes fleurs que je commençai à douter du ſuccès: je continuai cependant la préparation des cendres d'une grande quantité de fleurs de toute eſpéce ſans oublier celles qui ſont parfaitement blanches, & dont le réſultat m'intéreſſoit beaucoup, perſuadé qu'elles ne fourniroient aucune couleur au verre: J'en préparai auſſi à la manière de Tackenius dans l'eſpérance de retenir une plus grande quantité de parties colorantes, mais elles n'en furent pas plus chargées après la calcination qui étoit abſolument néceſſaire pour en chaſſer toute l'humidité, ainſi je préférai de me ſervir de la méthode de les brûler en plein air; d'autant plus que j'aperçus par quelques eſſais que l'humidité qui ſe deployoit avoit terni les verres que je eſſayois, & je ne venois pas même à mon but de reconnoître diſtinctement la couleur que j'avois obtenue des différentes cendres des fleurs.

J'ai commencé par la couleur rouge, enſuite par les autres couleurs principales, & enfin par les fleurs blanches, j'ai changé dans la premiere expérience les propor-

tions, ce qui m'a ſervi de régle pour les autres, & afin que l'on put voir d'un ſimple coup d'œil les réſultats, que j'ai obtenu. J'ai rangé en forme de tables ces expériences où je fairai pourtant les remarques néceſſaires. Il eſt bon cependant de remarquer, que dans la compoſition de mes verres je ne me ſuis ſervi d'autre matière vitrifiable que de la poudre de Callioux (*ſilex corneus*) ou du criſtal de roche; que pour aider la fuſion, je n'ai employé que du ſel de tartre bien depuré, ayant banni le borax & les autres fondans, comme ſoupçonnés avec raiſon de contenir des parties colorantes. Que pour ôter tout ſoupçon de couleur étrangère, j'ai eſſayé le ſimple caillou & le criſtal de roche avec le ſel de tartre qui me donnerent tous deux un aſſez beau verre tranſparent, & point du tout coloré, dont je me ſuis ſervi quelque fois auſſi pour unir aux ſubſtances végétales calcinées. Dans les tables j'ai toujours marqué caillou, quoique je me ſois ſervi indiſtinctement ou d'une matière ou de l'autre. Les eſſais ont été faits dans des petits creuſets au fourneau de verrerie.

TABLE PREMIÈRE.

MELANGES.	PROPORTION.	RESULTATS.	COULEUR.	REMARQUES.
Fleurs de Pavots *Sel de Tartre.*	*Une partie.* *Une partie.*	*Masse.* *Friable.*	*Cendrée.*	*Où l'on reconnoissoit quelques points rouges.*
Fleurs de Pavots *Caillou . .* *Sel de Tartre.*	*Deux parties.* *Deux parties.* *Une partie.*	*Un Verre.*	*Pourpre.*	*La surface du verre étoit un peu verdâtre avec des tâches rouges*
Fleurs de Pavots *Caillou . .* *Sel de Tartre.*	*Une partie.* *Une partie.* *Une partie.*	*Un Verre.*	*Rouge.*	*Plus beau que le précédent.*
Fleurs de Mauve . . *Caillou . .* *Sel de Tartre.*	*Une partie.* *Une partie.* *Une partie.*	*Substance Vitreuse.*	*Rouge, & violette.*	*De la couleur de la fleur.*
Fleurs de Gladieul . . *Caillou . .* *Sel de Tartre.*	*Une partie.* *Une partie.* *Une partie.*	*Un Verre.*	*Bleu tendre.*	*Qui ressembloit à l'aigue-marine.*
Fleurs de Genet. *Caillou . .* *Sel de Tartre.*	*Une partie.* *Une partie.* *Une partie.*	*Un Verre.*	*Jaune.*	*Dont les bords du Creuset étoient un peu colorés en rouge.* *
Fleurs blanches. *Caillou . .* *Sel de Tartre.*	*Une partie.* *Une partie.* *Une partie.*	*Un Verre.*	*Point coloré.*	*Qui avoit l'œil verdâtre comme le verre ordinaire.*

(*) La couleur rouge, qui se deceloit dans toutes les compositions avec le genet, me determina à suivre un travail sur cette plante, qui a donné des résultats curieux, comme on pourra voir dans un autre mémoire.

Je laiſſe juger du plaiſir, que j'ai eu du ſuccès de ces expériences, qui me confirmoient dans mon idée, puiſque chaque fleur colorée a donné dans la vitrification ſa couleur naturelle fort diſtinctement, & les blanches n'en donnerent point.

J'ai cherché enſuite à examiner ſi j'aurois reçu les mêmes réſultats des autres ſubſtances végétales colorées. J'ai examiné la racine de Garance ſi connüe par ſa teinture, la Béterave qui eſt ſi colorée, & la Gueſde dont on ſe ſert pour la teinture bleüe. J'ai enſuite fait des expériences ſur des graines colorées, & ſur la ſubſtance farineuſe des ſemences. Le *Solanum* fût le fruit, ou plutôt la graine que j'ai examinée ; c'eſt un végétal du Bréſil fort coloré en pourpre, que M. le Docteur Dana Profeſſeur de Botanique a fait végéter dans notre climat, & lui a fourni des ſavantes obſervations ſur la teinture (24).

Le réſultat eſt digne d'attention, car ce *Solanum* colora le verre beaucoup plus, proportion gardée que les cendres des fleurs.

Les ſubſtances farineuſes donnerent des couleurs aprochantes du blanc émaillé ; il m'a paru même d'entrevoir que les fruits, & les graines donnent plus de couleur, enſuite les fleurs, après celle-ci les racines, & les ſemences très-peu.

(24) Je dois de même faire honneur à M. le Docteur Dana qui ſe fit un vrai plaiſir de me donner ce fruit avec les préparations qu'il en avoit faites en m'inſtruiſant des expériences qu'il avoit entrepriſes & de leur réſultats.

TABLE SECONDE.

MELANGES.	PROPORTION.	RESULTATS.	COULEUR.	REMARQUES.
Garance. *Caillou.* *Sel de Tartre.*	4 *parties.* 4 *parties.* 3 *parties.*	*Un Verre.*	*Verd obſcur.*	*Avec des petites tâches rouges.*
Betterave. *Verre pulveriſé.*	*Une partie.* *Une partie.*	*Un Verre.*	*Violet.*	*Pas beaucoup clair.*
Iſatis ſativa. *Caillou.* *Sel de Tartre.*	4 *parties.* 4 *parties.* 3 *parties.*	*Un Verre.*	*D' un verd obſcur.*	*Couleur de la plante.* (*)
Solanum. *Caillou.* *Sel de Tartre.*	4 *parties.* 2 *parties.* 2 *parties.*	*Un Verre.*	*Pourpre foncé.*	*Plus coloré que celui des fleurs.*
Farine. *Caillou.* *Sel de Tartre.*	4 *parties.* 4 *parties.* 2 *parties.*	*Subſtance vitreuſe.*	*Blanchatre.*	*Aprochant à l' émail.*
Ris. *Caillou.* *Sel de Tartre.*	4 *parties.* 4 *parties.* 4 *parties.*	*Subſtance vitreuſe.*	*Plus blanche.*	*Auſſi émaillée.*
Feves. *Caillou.* *Sel de Tartre.*	4 *parties.* 4 *parties.* 2 *parties.*	*Subſtance vitreuſe.*	*Un peu verdâtre.*	*Auſſi émaillée.*

(*) Cette plante que les François nomment *paſtel*, ou *gueſde*, & nos artiſtes *Vaud* donne une teinture bleüe, mais c' eſt par la chaux vive, & l' alun qu' on l' obtient.

La foibleſſe des teintes colorées de la couleur de la fleur, qui paſſoit dans mes verres m' avoit fait ſoupçonner que par l' incinération & la calcination il ſe fit une grande perte de la matière colorante, attendu la grande évaporation qu' elle ſouffroit, & je voyois d' ailleurs clairement que les chaux des fleurs contenoient beaucoup d' autres parties non colorantes; pour y remedier j'ai tenté de me ſervir des ſucs concrets, & j'ai eſſaïé celui de Pavots extrait avec l' eſprit devin, qui à la verité avoit retenu d'avantage la matière colorante, mais l'umidité qui ſe developpoit rendant mes verres ternes je fus contraint d'abandonner cette méthode.

Je me decidai alors de ſeparer ces principes par des lixiviations repétées pour m'aſſurer de ce qu'il reſulteroit de ces ſucs concentrées & enſuite calcinés: car ainſi que je l'ai remarqué pag. 18. les fleurs reſtoient entierement dépourvuës de couleur après une forte decoction & d'ailleurs j'avois éprouvé que le Marc du *genét* & du *Solanum* que j'avois retiré d'une leſſive reiterée ne donnoit plus la moindre teinture aux verres. Je ne diſſimulerai pas ici le plaiſir que me fit la lettre de M.r le Comte de Saluces du 18. avril 1770., où il traite cet objet, & celle du premier maj qui contient des expériences & des obſervations ſur la racine de garance; je me fais un devoir de rapporter ces articles qu'on trouvera dans la note ſuivante.

EXTRAIT DES ARTICLES DES LETTRES. DE M. LE COMTE DE SALUCES.

D'ailleurs, mon cher Comte, il n' y a dans les fleurs que quelques parties qui ſoient deſtinées à les colorer, & dont on peut faire uſage pour peindre le verre. Voici mon procédé pour les ſeparer d' avec les parties abſolument non colorantes. Faites la decoction de telles fleurs qu'il vous plaira Juſqu' à ce que les pétales ou les feuilles ſoient entierement décolorées, évaporées en lentement l' umidité, & après la deſſiccation. calcinez le ſuc, & vous aurés la partie colorante: calcinés enſuite les feuilles ou le marc de votre ſuc, & vous n'obtiendrés aucune couleur: ce qui prouve que la partie colorante s'eſt combinée avec la

Il me reſtoit à voir ſi les ſels extraits des fleurs auroient, pour ainſi dire, ramaſſé toute la partie colorante, & ſi j'aurois coloré davantage, & avec plus de vivacité les verres, ce qui eſt en effet arrivé avec les ſels des fleurs de Pavot, de Genet, & de Garence qui donnerent des verres très-colorés chacun de la couleur de la fleur, comme on peut le voir dans la table troiſième.

Les expériences ſur les verres ayant parfaitement répondu à mon attente, je voulus eſſayer encore ſi ces couleurs végétales étoient à portée de colorer les chaux métalliques; j'ai pris du *minium*, avec lequel j'ai fait le mélange avec les différentes cendres des fleurs, comme on peut voir dans la table quatrième.

partie ſaline. Eſt ce maintenant le phlogiſtique ou des parties métalliques qui donnent la couleur? Où eſt ce de l'action du premier ſur celles-ci qu'on l'obtient? Paſſons maintenant au ſecond extrait . . *Vous ſcavés que la vitrification avec les cendres de racine de garance vous a manqué, ce qui ſuivant mes principes me paroiſſoit extraordinaire, j'en ai donc cherché la raiſon & le moyen de faire paſſer cette couleur dans les verres. J'ai imaginé que par un feu vif & ouvert tel qu'il le faut pour la calcination, la partie colorante, qui doit avoir ſelon moi une grande affinité avec le phlogiſtique, étoit preſque toute enlévée; car vous ſavés que cette racine abonde en huile & en parties volatiles. Je commencai donc par méler une partie de ſel de tartre ſur deux de poudre de garance. Vous connoiſſés la couleur naturelle de cette poudre qui eſt couleur de feuille morte, immediatement elle prit une couleur rouge preſque cremoiſi & manifeſta une odeur tres-vive de champhre. Je fus fort ſurpris de ces deux effets & ayant mis le tout dans un alembic de verre au bain de ſable, je commencai la diſtillation par un feu doux que je pouſſai par dégré à la dernière violence, & juſqu'à ce qu'il ne paſſoit plus rien dans le recipient. J'obtints par cette diſtillation deux liqueurs, dont la première eſt jaune, & la ſeconde eſt une huile empireumatique véritable, n'ayant pas encore pû examiner la première, le Caput mortuum étoit une ſubſtance grénuë & charboneuſe, mais d'une couleur à peu près comme le bleu de Pruſſe très-foncé. C'eſt cette fecule que j'ai combiné avec la moitié de poudre de marbre, & j'ai obtenu un verre coloré rouge jaunatre, très-beau & très-tranſparent.*

TABLE TROISIÈME.

MELANGES.	PROPORTION.	RESULTATS.	COULEUR.	REMARQUES.
Suc de Pavots. *Verre pulverisé.*	*Une partie.* *Une partie.*	*Un Verre.*	*Rouge.*	*Dont l'humidité l'avoit beaucoup noirci.*
Genet lessivé. *Caillou.* *Sel de Tartre.*	*Une partie.* *Une partie.* *Une partie.*	*Un Verre.*	*Verd foncé.*	*Comme celui des bouteilles de Bourgogne.*
Solanum lessivé. *Caillou.* *Sel de Tartre.*	*Une partie.* *Une partie.* *Une partie.*	*Un Verre.*	*Fort verd.*	*Où cependant il y avoit un soupçon de rouge.*
Sel de Pavots.	*Une partie.*	*Une masse.*	*Rouge.*	*Qui après quelques jours tomba en* deliquium.
Sel de Pavots. *Verre pulverisé.*	*Une partie.* *Une partie.*	*Un Verre.*	*Rouge.*	*Dont la couleur passa le couvercle du creuset.* (*)
Sel de fleur de Genet *Caillou.*	*Une partie.* *Une partie.*	*Substance vitreuse.*	*Jaune dorée.*	*Un peu coloré en rouge sur le bords, & émaillée.*
Sel de Garance. *Caillou.*	*Une partie.* *Une partie.*	*Substance vitreuse.*	*Teinte en rouge.*	*Un peu émaillée*

(*) La volatilité fût si grande que le bas du creuset fût aussi coloré en dehors malgré sa grande épaisseur même dans la couleur rouge la volatilité m'a paru plus sensible.

TABLE QUATRIÈME.

MELANGES.	PROPORTION.	RESULTATS.	COULEUR.	REMARQUES.
Fleurs de Pavots Minium.	*Une partie.* *Une partie.*	*Masse.*	*Rouge.*	*Où le plomb étoit réduit en litharge*
Fleurs d'Iris. Minium.	*Une partie.* *Une partie.*	*Le plomb fut en partie revivifié.*	*Avec des points bleus.*	*La couleur se soutint à un plus grand feu.*
Fleurs de Genet. Minium.	*Une partie.* *Une partie.*	*Une masse friable.*	*D'un très-beau jaune*	*Qui à un plus grand feu devint un verre jaune.*
Fleurs blanches. Minium.	*Une partie.* *Une partie.*	*Masse friable.*	*Grisâtre.*	*Aprochant du petit verd.*
Suc de Pavots. Minium.	*Une partie.* *Deux parties.*	*Espéce de litharge.*	*Colorée en rouge à la surface.*	*Dont l'humidité avoit terni l'essai.*
Sel de Pavots. Minium.	*Une partie.* *Une partie.*	*Substance vitreuse.*	*Un peu colorée en rouge.*	*Qui se soutint à un plus grand feu.*
Sel de Genet. Minium.	*Une partie.* *Une partie.*	*Substance vitreuse.*	*Jaune doré.*	*Les bords du creuset étoient rouges, & émaillés.*

(*) L'on voit que les résultats de ces expériences sur les chaux métalliques sont très-conformes aux précédents; que si les matières n'ont pas été toutes réduites en verre c'est faute du feu violent qui il y auroit fallu pour le verre de plomb, & d'ailleurs le phlogistique en revivifie toujours quelque peu.

L'on apperçoit très-aisément d'après ces expériences que les sels contiennent la plus grande partie des principes colorants des fleurs, & des autres parties des végétaux à tel point, que avec les sels extraits des fleurs je suis venu à bout de peindre de la porcelaine, de la fayance & de l'émail, & que aussi en se donnant du soin l'on peut colorer du cristal, & imiter de cette façon les pierres fines.

Je finirai ces détails par l'examen que je fis sur le bois pétrifié, substance jadis appartenante au regne végétal, (qui est rangée à présent par les Naturalistes dans le minéral) pour observer si elle contenoit quelques devises de son premier état : l'ayant dont agrégé avec du sel tartre j'ai obtenu un verre très-beau presque transparent couleur d'agathe, où l'on ne reconnoissoit pas la moindre trace de verd. (4)

Tel est le précis des expériences que j'ai fait sur les fleurs, & les autres parties colorées de végétaux (5),

(4) Il n'en est pas de même des os fossiles, qui ne perdent jamais de leur nature, & ne peuvent être jamais rangez dans le regne minéral, puisque on obtient au grand feu par leur distillation une huile empireumatique, & un sel volatil, & le *caput mortuum* mêlé avec la fritte donne un verre blanc & opaque, caractéres distinctifs du regne animal, comme jaurai lieu d'observer dans la suite. Voyez M. Carl. dans son traité du *Lapis Lydius ossium fossilium.*

(5) J'ai tenté plusieurs expériences pour pouvoir ranger celles ci dans un certain ordre, j'ai tâché avec toute la briéveté de n'omettre aucune circonstance intéressante au sujet, comme aussi de rapporter avec toute l'impartialité les résultats, ce que l'on est dans le cas de vérifier, en refaisant les expériences. Je dois avvertir pour ceux qui voudront se donner la peine de les suivre, qu'il faut avoir un attention toute particuliére dans l'administration du feu, puisque attendu la volatilité de la matière colorante, telle cendre, ou tel sel, qui, après un tel tems de feu vous donnera une belle couleur, si vous le laissez quelque heure davantage la couleur s'affoiblit, ce qui arrive aussi aux couleurs métalliques de la porcellaine, & de l'émail. Je ne saurois indiquer des régles précises; c'est la pratique qui doit éclairer là-dessus. J'aurois à la vérité pû rendre plus beaux les verres des essais, en changeant les mélanges & les proportions ; cependant

& il me paroit démontré que la matière colorante dans les fleurs, comme dans les autres parties des végétaux est une matière solide & inhérente, & qui, par conséquent n'est pas sujette si aisément à changer.

Nous ne connoissons, que les substances métalliques capables de teindre le verre, n'y auroit-il pas lieu de croire que ce sont aussi des parties métalliques qui produisent la couleur dans les fleurs, & dans les autres parties des végétaux? Que ces parties étant extrêmement divisibles & solubles dans l'eau par le moyen des sels, sont dans le cas d'être introduites dans les vaisseaux capillaires des plantes, & des fleurs, & qu'à l'aide du phlogistique leur couleur en est développée, ne devant pas au reste confondre le phlogistique, & la matière colorante, comme a fait M. Pott, puisque ce sont deux matières bien différentes à mon avis, l'une pour parler le langage des Anciens étant la matière, & l'autre la forme.

Ce puissant ressort de la nature, cet agent général qui se trouve dans tous les corps, pourroit très bien être le fluide électrique; j'ai été charmé de trouver dans le dernier ouvrage du célébre M. Francklin un sentiment très conforme (6) „ Je suis porté, dit-il, à croire que le „ feu fluide, de même que l'air fluide est attiré par les

comme je portois au reste mon attention sur les résultats de la couleur, que les substances végétales m'auroient donné dans la vitrification, j'ai cru pouvoir m'en dispenser d'autant plus, que comme j'ai dit, j'ai banni toutes les matières, qui étoient soupçonnées de contenir des parties colorantes.

(6) I hare been rather inclined to think that the fluid *fire* as well as the fluid *air*, is attracted by plants in their growth and becomes consolidated with the other materials of which they are formed and makes a great part of their substance: That when they come to be digested and to suffer in the vessels a kind of fermentation part of the fire as well as part of the air recovers its fluid active state again and diffuses itself in the body digesting and separating it. Expériments and observations on Electricity and Benjamin Francklin London 1769 Lettre 26 page 346.

„ végétaux, & qu' il s'unit, & fait corps avec les autres „ matières, dont ils ſont formés, & dont il fait dès lors „ la principale partie. „ Il n'eſt pas difficile d'appercevoir que à l'aide de ce feu les végétaux reçoivent un principe vital, & le développement de la couleur; (7) il ſeroit à déſirer que l' illuſtre M. Francklin voulut par ſes ſavantes obſervations examiner cette partie qui lui fourniroit une carriére lumineuſe à parcourir.

De ce que nous voyons que la chaîne étroite, qui lie le regne végétal au minéral, lie encore plus étroitement l'animal au végétal, ne peut-on pas ſoupçonner que cette chaîne s'étend auſſi de l'animal au minéral? de ſorte que ce que j'ai dit plus haut, ne ſoit pas ſans probabilité, ſavoir qu'il n' y a qu'une même cauſe productrice des couleurs dans les trois regnes, puiſque par quelques eſſais, que j'ai fait ſur des ſubſtances animales, j'ai obtenu les mêmes réſultats que dans les végétales.

Je me contenterai de rapporter l'expérience que je fis ſur le ſang, la ſubſtance animale la plus colorée, & la plus belle: les ſentimens de ceux qui ont traité de ſa couleur ſont partagés, quelqu'un a cru de devoir l'attribuer au ſouffre, qui y eſt contenu; quelqu'autre aux ſels, au mercure ſubtil, ſelon Paracelſe. Haller quoique il

(7) Il me paroit que ce n'eſt pas ſans probabilité que on a ſuppoſé le fluide électrique, comme le moteur de la partie colorante; nous en voyons une preuve dans la revivification, & vitrification des chaux métalliques (a), comme auſſi dans les taches circulaires colorées, lorſque l'on fait paſſer la commotion electrique à travers des feuilles de différent métaux placés entre deux lames de verre poli. (b)

L' expérience de M. Prieſtley ſemble le prouver d'avantage, car ayant fait paſſer l'exploſion électrique ſur la ſurface de l' huile de vitriol, il vit une couleur fort rouge à la ſurface de l' huile qui étoit ſurément due au fer: hiſtoire de l' électricité Tom. 3 pag. 390.

(a) Beccaria elettriciſmo artificiale §. 738, e ſuiv.

(b) Expériences, & obſervations ſur l'électricité faites à Philadelphie par Beniamin Franklin Tom. 2 pag. 53, & ſuiv.

ait adopté dans les premiers ouvrages le ſentiment de Boherawe ſon maître, c'eſt-à-dire, que la couleur du ſang étoit produite par la denſité des globules. Dans les derniers il a propoſé une opinion tout-à-fait vraiſemblable, c'eſt-à-dire, que la couleur rouge étoit due aux particules ferrugineuſes contenues dans le ſang (8), appuyant ſon opinion ſur les expériences de Geofroi de Lemeri & ſurtout ſur celles du ſavant Menghini, & des Académiciens de Bologne, (9), qui ont trouvé que preſque toute la partie rouge du ſang après avoir été torrefiée au feu, étoit attirable par l'aimant, & avoit toutes les propriétés du fer.

En effet ayant calciné du ſang, j'en ai obtenu une chaux colorée en rouge comme du ſaffran de mars, laquelle a été attirée en partie par l'aimant, ce qui ne me laiſſoit plus aucun doute ſur l'exiſtence du fer (10), ayant donc mêlé parties égales de cette chaux avec du verre pulveriſé dans un creuſet au feu de verrerie, la matière fût réduite en verre, dont la ſurface étoit blanche comme l'eſt ordinairement le verre fait avec des parties animales, mais ayant caſſé le creuſet le verre étoit extrémement rouge en dedans, même la couleur rouge paſſa le creuſet par ſa grande volatilité à peu-près de la même façon, que j'ai obſervé dans l'expérience cinquième ſur le ſel de Pavot Table III.

(8) *Elementorum phiſiologiae.*
(9) *Commentaria Bononientia Tom. II. pag. 2 Vincentii Menghini diſſertatio de ferrearum particularum ſede in ſanguine pag.* 244.
(10) Le Médecins acoûtument de donner des préparations de fer dans les maladies, où la partie colorante du ſang ſe diminue, comme dans les pâles couleurs dans quelques eſpéces de cachexies, dans les hidropiſies &c. Mais il ne ſont pas d'accord ſur la préparation à laquelle ils doivent donner la préférence, il me paroit que le fer du ſang calciné feroit, peut-être, plus analogue, & plus facile à reprendre ſa forme, je laiſſe aux Médecins à décider ſur cet article.

L'on voit par cette expérience qu'il y a un ſeul principe colorant dans les trois regnes. Le verre que j'ai obtenu du ſang, celui que j'ai obtenu du ſel de pavots, & celui que l'on obtient par les ſafrans de mars ſont trois rouges des trois regnes différents, & ſi celui fait avec le ſang, eſt très-analogue à celui du ſafran de mars par le fer que l'on y a reconnu (11), ne pourroit on pas préſumer que celui qui a été compoſé avec les pavots doive ſa couleur à quelque partie métallique auſſi? Et comme j'ai reconnu une grande volatilité dans le principe colorant du ſang, quoique d'aileurs il ſoit inconteſtable que ce principe eſt métallique, on ne doit pas être ſurpris de la même volatilité dans les couleurs végétales, & cette volatilité ne m'empêche pas de les croire métalliques.

Quelques autres eſſais ſur des ſubſtances animales me donnerent des réſultats conformes aux précédentes dont je me reſerve à traiter plus particulièrement.

Les métaux donnent la teinture au verre en différentes couleurs, dont chaque métal lui donne la ſienne particulière; l'or donne au verre la couleur pourpre, l'argent, la jaune, le cuivre une couleur bleuâtre, le fer lui donne un verd foncé, le regule d'antimoine donne la jaune,

l'étain

(11) La couleur rouge du grenat du jaſpe rouge du porphire, de la terre rouge d'Angleterre, que l'on demande beauté, & quantité d'autres ſubſtances du regne minéral, dans leſquelles on reconnoit très-diſtinctement le fer, & à qui l'on doit la couleur rouge paroit en fournir une autre preuve.

(12) Je ne doute pas, que les belles couleurs du plumage de certains oiſeaux viennent du même principe. M. De Buffon obſerve très-bien, que les pays chauds fourniſſent une plus grande variété de couleurs. (c) Il me paroit d'y entrevoir la même raiſon, que dans les plantes; une plus grande chaleur développe davantage les principes colorants, qui ſont métalliques dans tous les regnes. C'eſt le ſujet du prix de l'Académie de Berlin propoſé pour l'année 1772 que d'éclaircir la raiſon de la couleur du plumage des oiſeaux, & dont je ſuis bien curieux de ſavoir la réſolution.

(c) Buffon hiſtoire des oiſeaux Tom. I. diſc. prélim. p. 22.

l'étain & le zinc leur donne une couleur laiteuſe, les différentes terres colorent le verre, & par la couleur qu'elles donnent, nous connoiſſons les parties métalliques qui ſont contenues dans ces terres.

Si nous examinons les pierres colorées, l'on a grande raiſon de croire qu'elles doivent leurs couleurs au même principe, c'eſt-à-dire aux parties métalliques, tel eſt le ſentiment du célébre Chevalier Linné (13), & de

(13) „ Quartzum enim, & ſpatum, dum in metalla habitant colorata re-
„ perimur, color autem eorum cum rubigine ſeu ocra ipſius me-
„ talli ſemper concidit ocra enim ferri, quae aut brunea, aut lutea,
„ aut rubra eſt, lapides iiſdem tingit coloribus. Ocra cupri quae ab
„ accido fit viridis, ab alkali cyana aut viridi, aut violaceo lapides
„ tingit colore. Hae ocrae, quoniam vulgares ſunt, ita etiam hi
„ colores lapidum vulgariſſimi.

Le même Linné dit dans un autre endroit, *omnis fere color in Regno lapideo a metallis ſuam ducit originem*, *hinc Boherawius* (d), *gemmae inquit pellucidae quidem, ſed eximio nitentes colore videntur materiem habere ceteris ſimilem, ſed pigmentum metalliam in primis aut & alium fixmm, & fiſſile in ipſa nativitate, quam intime permixtum, unitumque illa quippe evincit colorum ſimilitudo, atque artificioſa gemmarum confectio.*

„ Ferrum dat vitriolum vitride, ſed ocram luteam, quae urtione
„ rubra evadit, & hinc rubinus ruber. (e)

„ Cuprum dat vitriolum caeruleum, ſed ocram vividem ab acido,
„ ut in ſmaragdo, ocram caeruleam ab alkali fixo, ut in Zaffiro,
„ Cyanam ab alkali volatili, ut in Beryllo.

„ Plumbum dat vitriolum album, ſed ocram albido flavam, ut in
„ topatio.

„ Biſmutum dat ocram rubicundam, ut in hiacynto, ergo vidi-
„ mus colorem criſtallorum dependere ab ocra ipſius metalli figu-
„ ram autem a ſalibus. Linnei ammenitates Accademicae Martini
„ Kaller de criſtallorum generatione p. 471 Tom. V.

(d) Boherawe chem. 1, 54.

(e) Quant aux Rubis, Libavius a cru qu'on devoit en attribuer ſa couleur à l'or nous ſavons que l'on en trouve dans les mines d'or, ou bien tout près, & ſur cette particularité il a dit que l'on pouvoit très-bien imiter la couleur du Rubis, en mêlant avec le criſtal une teinture d'or réduite en liqueur ou en huile par la diſſolution. Voyez Libavius. Lib. 2 chap. 35.

Il ſe peut très-bien que la vapeur de l'or pénétrant ces pierres criſtallines, puiſſe leur donner cette couleur comme l'expérience nous le fait voir, dans les pierres artificielles, comme il y a plus de probabilité que le grenat, le jaſpe, l'ématite, la cornaline doivent leurs couleurs au vapeurs du fer; dont on connoît l'exiſtence.

M. De Romé Deslile (14), il n'eſt pas difficile de concevoir de la manière, que les ſpaths les quarts, les criſtaux, & les pierres ſe colorent par les vapeurs métalliques, ſi l'on examine la manière dont ſe forment les métaux, auxquels les ſpaths, & les quarts ſervent de matrice, l'on peut conſulter à ce ſuiet un ſavant mémoire de M. Eller dans les mémoires de l'Academie de Pruſſe an. MDCCLIII. Tom. IX. pag. 3.

Cependant comme le fer eſt plus généralement repandu dans la nature ſoit dans le régne minéral, où l'on ne ſauroit trouver que très-peu de corps qui n'en contiennent pas; ainſi que nous les voyons dans les pierres, les marbres, les terres, les argilles &c., ſoit dans le régne végétal & animal, où on le reconnoit très-diſtinctement dans quantité de plantes, & d'animaux (15), il pourroit bien être la ſource de toutes les autres couleurs végétales; que ſi on lui a déjà attribué la verte du régne végétal en gros, il ne ſeroit pas mal à propos de lui at-

(14) Le ſentiment de M. Romé Deslile dans ſon traité de la Criſtallographie eſt très-conforme a celui du Chevalier Linné ſur la raiſon de la couleur dans les criſtaux, & dans les pierres précieuſes due aux ſubſtances métalliques. „ Tous ces criſtaux colorés (dit-il p. 184) „ ſe forment pour l'ordinaire dans les mines, & doivent leurs couleurs à des émanations métalliques, qui s'y incorporent dans le „ temp qu' ils ſont encore fluides, ou qui s'attachent a leur ſurface, „ lorſque ces criſtaux ont pris trop de conſiſtance pour s'en laiſſer „ pénétrer.

A l'égard de la couleur des pierres précieuſes (dit-il pag. 196.) „ La plus part des Naturaliſtes l'ont attribué comme celle des criſtaux aux vapeurs métaliques, qui circulent dans les mines, ou au „ mélange de quelque diſſolution des ſubſtances minérales, mais ces „ Auteurs ont été peu d'accord l'eſpéce de métal qui coloroit telle, „ ou telle pierre.

Il rapporte enſuite le paſſage de Chevalier Linné que je viens de citer.

Eſſai de Criſtallographie par M. De-Romé Deslile à Paris 1772.

(15) L'on pourra conſulter les Commentaires des Savants Académiciens de Bologne pour voir des expériences très-curieuſes ſur le fer retiré des plantes, & des animaux Comm. Bonon. Tom. II. pars I, p. 109.

tribuer les autres auſſi, puiſque nous ſavons, que, outre la grande facilité qu' il a d'être attaqué par tous les menſtrues, ce qui prouve ſa grande diviſibilité, nous voyons qu' à l'aide de différentes opérations l'on parvient à en tirer toutes les couleurs, ainſi que M. le Comte de Saluces le prouve dans un ouvrage qu' il prépare ſur ce ſujet.

Il me paroit d'entrevoir que la nature toujours ſimple dans ſes opérations a établi un même principe colorant dans les trois régnes, au moyen de cette admirable chaîne qui en lie toutes les parties; que ce principe eſt métallique; que dans le régne végétal ces parties réduites en forme ſavoneuſe ſont introduites dans les (16) plantes, & y décélent leur couleur; que dans le corps minéraux, enfin elle eſt apportée par les vapeurs volatiles.

Que la cauſe de ſon développement n'en eſt qu'une ſeule auſſi, c'eſt-à dire, le phlogiſtique.

Cette partie de la phiſique mérite aſſez d'être approfondie, & nous offre un champ vaſte pour augmenter le nombre de nos connoiſſances.

J' eſpére que la nouveauté du ſujet fera acueillir favorablement ce mémoire, & je me reſerve à faire des plus amples obſervations, pour mettre la matière dans ſon plus grand jour.

(16) C'eſt encore là la penſée de M. le Comte de Saluces, ſavoir que la nutrition ſe fait dans les plantes par inturſuſception, & que le ſuc néceſſairement doit prendre cette nature au moyen des ſels, & de l'eau pour paſſer dans tous les plus petits vaiſſeaux, & y être diſtribués dans toutes les parties de la plante ſans les endommager.

CAROLI ALLIONII

AUCTARIUM

AD SYNOPSIM METHODICAM STIRPIUM

HORTI REG. TAURINENSIS.

Exhibet hoc opuſculum enumerationem plantarum, quibus Hortus Regius Taurinenſis auctus eſt ab anno 1762, *quo prodiit Miſcellaneorum Taurinenſium Tomus alter. Ut autem in hoc auctario commode Tyrones, & Botanici ſtirpes, quas addidi, reperire poſſint, paucis omnino mutatis eamdem methodicam diſpoſitionem ſervavi, ſimiliterque ſpecies ad Linnaena genera tenaciter retuli. Nominibus quoque* trivialibus *uſus ſum Cl.* Linnaei, *ſed illae ſtirpes, quas* Linnaeus *non habet, indicantur nominibus, quae a Cl. Viris* Jacquin, & Crantz *mutuatus ſum, aut ipſe aſſignavi, ſi nullum adhuc haberent. Opportunum porro judicavi huic auctario iterum inſerere ſtirpes quaſdam in ſynopſi jam recenſitas, quae nullum tunc temporis* triviale *nomen habebant. Quae minus notae aut novae ſunt, brevi deſcriptione ita definiuntur, ut ſaltem certo nunc internoſci poſſint; alio autem loco, & copioſius, & icone illuſtrabuntur.*

CLASSIS PRIMA.

Plantae flore monopetalo ſimplici.

I. MONOSTEMONES.

Boërhavia erecta. L.
    diffuſa. L.
Najas major * (1)
    minor * (2)

II. DISTEMONES.

A. Gymnospermae.

Salvia indica. L.
    hiſpanica. L.
    diſermas. L. (3)
    ſerotina. L. (4)
    haematodes. L.
    aurea. L.
    acetabuloſa. L. (5)
    pomifera. L.
    pinnata. L.
    ſylveſtris. L.
    ſyriaca. L. (6)
    aegyptiaca. L.
    lyrata. L.
    clandeſtina. L. * (7)
    ceratophylloides. L.

(1) *Fluvialis latifolia fructu minus obtuſo monoſpermo* Mich. *gen. p.* 11 *T.* 8 *f.* 2.

(2) *Fluvialis minor foliis anguſtiſſimis denticulatis, deorſum reflexis, fructu acuto tenuiori monoſpermo* Mich. *gen. p.* 11 *T.* 8 *f.* 3.

(3) Haec eſt *ſalvia villoſa, & viſcoſa foliis lanceolato ovatis verſus petiolum angulatis Miſc. Taur. Tom. II. p.* 49, quam Cl. Arduini notam fecit *ſpec. I. p.* 9 *T. I.* Huius autem Cl. Viri liber anno 1759 editus ad manus noſtras tunc nondum venerat.

(4) Haec eſt *ſalvia Americana Chia dicta Miſc. Taur. Tom. II. p.* 49 etiam ab Arduini deſcripta *ſpec. I. p.* 10 *T.* 2.

(5) *Salvia or. foliis ſubrotundis acetabulis moluceae Tourn. cor. pag.* 10 *& Miſc. Taur. p.* 49.

(6) *Syriaca* L. non differt ab *Aegyptiaca* L. *mantiſs. p.* 26 *n.* 36, ſed Arduini ſynonimon ſub *Syriaca* poſitum in *ſyſt. p.* 65 *n.* 18 pertinet ad *ſalviam diſermas* L.

(7) *Clandeſtinam ſalviae verbenacae* varietatem eſſe puto, cum eam in horto Taurinenſi cultam non modo flores ex purpureis caeruleos, ſed omnino ampliores, quales in *Verbenaca* occurrunt, protuliſſe viderim.

nivea. (8)
caesia. (9)
Ziziphora capitata. L.
Verbena carolina. L.
mexicana. L.
indica. L.
curassavica. L.
nodiflora. L.
jamaicensis. L.
orubica. L.
supina. L.
Monarda punctata. L.
clinopodia. L.
fistulosa. L.

B. Monangiae.

Amethystea caerulea. L.
Pinguicula vulgaris. L. *
Utricularia vulgaris. L. *

C. Diangiae.

Veronica longifolia. L. *
spuria L.
scutellata. L. *
aphylla. L. *
bellidioides. L. *
peregrina. L.
Virginica. L.
fruticulosa. L. *
prostrata. L. *
latifolia. L. *

D. Fructu pulposo.

Jasminum humile. L.
Phillyrea angustifolia. L. *
media. L. *

III. TRISTEMONES.

A. Hypocarpiae.

Montia fontana. L. *

B. Epicarpiae.

1. *Flore calyculato.*
Melothria pendula. L.
Cucumis anguria. L.
prophetarum. L.
chate. L.
Momordica operculata. L.
Bryonia laciniosa. L.
2. *Calyce destitutae.*
Crocus vernus. *
Iris Xiphium. L.
florentina. L.
foetidissima. L.
tuberosa. L.
sibirica. L.
Valeriana sibirica. L.

(8) Hoc triviali nomine indicatur *salvia cretica angustifolia* CLUS. *hist.* 343 cuius folia brumali praesertim tempore alba omnino, & nivea evadunt.

(9) *Horminum subrotundo folio fl. caesio hispanicum* BARREL. *ic.* 200.

veſicaria. L. *
coronata. L. *
celtica. L. *
dentata. L. *
rubra L. *
anguſtifolia * (10)

IV. TETRASTEMONES.

A. Gymnodispermae.

1. *Flore plano.*

Gallium mollugo. L. *
uliginoſum. L. *
rubrum. L. *
ſpurium. L. *
ſilvaticum. L. * (11)
paluſtre. L. *
ſaxatile. * (12)
lucidum. * (13)
cinereum. * (14)

(10) *Valeriana rubra anguſtifolia* Bauh. *pin.* 165 nullo modo pro varietate *valerianae latifoliae marinae* haberi poteſt. Sic etiam ſpecie inter ſe differunt *veſicaria*, *coronata*, *dentata*.

(11) Eſt *Galium montanum latifolium ramoſum* Tourn. *inſt.* 115 & *Miſc. Taur. p.* 51 *Galium* autem *ariſtatum* L., & *Galium bericum* Turra *diar. ital.* 1764 *p.* 119 fortaſſe referri debent ad *Galium ſilvaticum* L. Certe ad hoc pertinet *Rubia laevis linifolia floribus albis montis virginis* Bocc. *mus. p.* 83 *t.* 75. uti probat icon a Boccone data, & locus natalis. In collibus enim Taurinenſibus abundat *Galium ſilvaticum*, & ex Etruria accepta ſpecimina *Rubiae levis linifoliae* ad idem *Galium* ſpectant.

(12) *Galium foliis ſenis ellipticis, petiolis breviſſimis unifloris* Hall. hiſt. n. 718, & *Galium ſaxatile ſupinum molliore folio* Iussi. Acad. *ſcien. Paris* 1714 ad noſtrum Galium pertinent; num eamdem ſtirpem intelligat Cl. Linnaeus, dubitari poteſt.

(13) *Galium caule herbaceo, foliis ſenis ſubulatis incurvis, fructibus nigris rugoſis oblongis incurvis.* Hoc eſt *Galium foliis ſenis rigidis obſcure virentibus, floribus purpuraſcentibus e ſummo caule prodeuntibus enum. nic. p.* 4 Nitide, & ſplendide tota planta viret. Folia ſemiteretia margine revoluto ſcabriuſculo, ſed ſcabritie vix tactu percipienda. Primum ſena, deinde 5 aut. 4 folia ſunt. Ad radicem valde ramoſum eſt, ſed rami eriguntur ſoepius ſimplices, panicula florum terminati. Flores, quos in horto olim dedit ſubrubentes, nunc albos praebet.

(14) *Galium caule ſublignoſo, foliis ſenis longe ellipticis, rigidis, ſerrato aculeatis, fructibus ovatis laevibus albeſcentibus.* In vineis *Saurgii*

tenuifolium. * (15)

Valantia muralis. L. *

hispida. L.

aparine. L. *

cruciata. L. *

articulata. L.

glabra. L. *

2. *Fl. infunduliformi.*

Crucianella latifolia. L.*

Spermacoce tenuior. L.

B. GYMNOTETRASPERMAE.

1. *Galea plana.*

a. *Parum fixa.*

Mentha viridis. L. *

gentilis. L.

sylvestris. L. *

piperita. L.

exigua. L. *

Origanum creticum. L.

onites. L.

Thymus mastichinus. L.

cephalotos. L.

alpinus. L. *

patavinus. L.

piperella. L. *

pannonicus. * (16)

Hyssopus nepetoides. L.

lophantus. L.

satureja capitata. L.

nascitur elegans haec *Galii* species rore glauco obducta, quo deterso lucide viret, non tamen obscuro atque intenso virore. Caules obscure tetragoni. Folia longe elliptica, in fine ampliora, & alba notabili spina praedita. Rami ad angulum rectum ex caule solent discedere, evidenter articulatis internodiis. Panicula ramos, & caulem terminat extremis pedunculis saepe trifloris uno abortiente; semina prae reliquis huius generis magna sordide albescentia glabra, sed ex magna maturitate rugas contrahunt. Non est *Galium glaucum* L., cuius folia linearia sunt longiora, non patentia, non serrato aculeata, ut omittam in *Glauco* ramos potius terminari umbella florum, quam panicula.

(15) *Galium herbaceum procumbens diffuse ramosum, foliis senis linearibus mollibus, fructibus nigris rugosis subrotundis. Galium foliis senis rigidis diffuse rambrum floribus albis e summo caule prodeuntibus enum. nic. p.* 5. Folia radiatim utique exstant, sed rigida non sunt, mollia, & flexilia, nitida, sed non splendentia linearia, leviter serrulata cum spinula, ad ramos saepe octona. Caules acute quadranguli diffuse ramosi, singulis ramis panicula florum terminatis. Pedunculi biflori.

(16) *Thymus foliis ellipticis hirsutis* HALL. *hist.* 236.

b. *Profunde ſecta.*
Lavandula ſtaechas. L. *
Syderitis montana. L. *
ſyriaca. L.
canarienſis. L.
hyſſopifolia. L. *
cretica. L.
Marrubium alyſſon. L. *
candidiſſimum. L.
criſpum. L.
2. *Galea concava.*
Lamium garganicum. L. *
maculatum. L. *
laevigatum. L. *
Stachys maritima. L.
recta. L. *
annua. L. *
Dracocephalon peregrinum. L. (17)
ruyſchiana. L. *
virginicum. L.
thymifora. L.
Leonurus tartaricus. L.
ſibiricus. L.
Phlomis herba venti. L.
niſſolii. L.
nepetella L.
Prunella hyſſopifolia. L. *
Cleonia luſitanica. L.
Praſium majus. L.
Ballota alba. L.
ſuaveolens. L.
Betonica alpina. (18)
danica. (19)
Nepeta nepetella. L. * (20)
italica. L.
tuberoſa. L.
violacea. L.
hirſuta. L.
lanata. J.
Meliſſa cretica. L.
Horminum virginicum. L.
pyrenaicum. L. *
Scutellaria peregrina. L. (21)
lateriflora. L.
alpina. L. *

(17) *Dracocephalon foliis ex lanceolato-linearibus, rarius dentatis ſpinuloſis floribus gemellis Martini.* HALL. *gott. p.* 335, & *Miſc. Taur. p.* 52.

(18) *Betonica foliis ovatis rotunde crenatis, ſpica ovata compacta* HALL. *hiſt. n.* 265 *Betonica foliis hirſutis floribus purpureis ampliſſimis* ZANON *hiſt. p.* 46 *t.* 30, & *Miſc. Taur. p.* 52.

(19) *Betonica maior danica* PARK *theſ.* 615.

(20) *Cataria tenuifolia* CLUS. *hiſt.* XXXIII, & *Miſc. Taur. p.* 52.

(21) *Caſſida caule quadrangulo rubente teucrii ſerrato folio fl. caeruleo labro albo* TILLI *pis*, & *Miſc. Taur. p.* 52.

3. *Galea nulla seu flore unilabiato.*

Teucrium campanulatum. L. (22)
hircanicum. L. (23)
iva. L. *
fruticans. L. *
lucidum. L. *
Ajuga orientalis. L.

C. MONANGIAE.

Browalia elata. L.
Scoparia dulcis. L.
Capraria gratioloides. L. (24)
Tozzia alpina. L. *
Hebenstretia dentata. L.

D. DIANGIAE.

1. *Corolla non labiata.*

Plantago media. L. *
alpina. L. *
indica. L.
maritima. L.
albicans. L. *
lusitanica. L.
serpentina. * (25)
Cuscuta europaea.

2. *Corolla labiata.*

a. *Calyce quadrifido.*

Euphrasia odontites. L. *
lutea. L. *

b. *Calyce quinquefido.*

Pedicularis tuberosa. L. *
flammea. L. *
palustris. L. *
hirsuta. L. *
comosa. L. *
rostrato spicata. C. * (26)
Antirrhinum orontium. L. *
alpinum. L. *
arvense. L. *
bellidifolium. L. *
supinum. L. *
aegyptiacum. L.

(22) *Teucrium supinum palustre apulum glabrum foliis laciniatis fl. albo.* D. *Michelii* TILLI *pis. Misc. Taur. Tom. II. p.* 53.

(23) *Teucrium foliis cordatis crenatis petiolatis, spicis oblongis densissimis ex Hircania Martini* HALL. *comm. Gotting.* 1752., & *Misc. Taur. Tom. II. p.* 53.

(24) Haec est *Lindernia* a me descripta *Misc. Taur. Tom. III. p.* 178, quam a *Caprariae* genere differre demonstravi.

(25) *Plantago gramineo folio maior* TOURN. *inst.* 127, quae mihi videtur ab *alpina*, *coronopo*, aliisque distinguenda.

(26) Celeb. LINNAEUS nostram, quae est *rostrato spicata* Cl. CRANZII, refert ad *incarnatam* in speciebus plantarum, sed notae huic tributae nostrae adamussim non respondent.

geni-

genistifolium. L. * (27)
elatine. L. *
Scrophularia lucida. L. *
sambucifolia. L.
scorodonia. L. *
frutescens. L.
peregrina. L. *
auriculata. L.
Digitalis purpurea. L.
obscura. L.
canariensis. L.
grandiflora * (28)
parviflora * (29)
Gratiola officinalis. L. *
Erinus alpinus. L. *
Chelone glabra. L.
Martynia annua. L.
Bignonia capreolata. L.
Lantana aculeata. L.
Ruellia clandestina. L.

V. PENTASTEMONES.

A. Monostyle.

1. *Gymnomonospermae.*

Sesamum indicum. L.
Plumbago zeylanica. L.
Basella alba. L.
Mirabilis longiflora. L. (30)
dichotoma. L.

2. *Gymnotetraspermae.*

a. *Squamulis in fauce.*

Anchusa sempervirens. L.
undulata. L.
angustifolia. L. *
Borago officinalis. L.
indica. L.
africana. L.
Cynoglossum cheirifolium. L.
apenninum. L.
virginicum. L.

b. *Fauce nuda.*

Pulmonaria officinalis. L. *
angustifolia. L. *
Cerinthe major. L. *
Onosma echioides. L. *
Echium creticum. L. *
violaceum. L.
Heliotropium peruvianum. L.
Myosotis nana * (31)

(27) *Genistifolium ab antirrhino linaria* vere differre non puto.
(28) *Digitalis lutea magno flore* Bauh. *pin.* 244.
(29) *Digitalis flore minore subluteo angustiore folio.* Bauh. *hist. II. p.* 814. Hae duae stirpes revera inter se differunt, ita ut duas distinctas species constituant, sicuti recte monet in *historia plantarum* Celeb. Haller.
(30) *Mirabilis foliis viscidis villosis, tubo floris cylindrico villoso foliis longiore* Zinn. *comm. gotting. Tom. V.*, & *Misc. Taur. p.* 14.
(31) *Echium scorpioides alpinum nanum supinum* Bocc. *mus. pag.* 149. *T.* 107.

3. *Monangiae.*

a. *Valvis duabus.*

Anagallis latifolia. L.
Menyanthes nymphoides. L. *

b. *Valvis quinque.*

Soldanella alpina. L. *
Androſace maxima. L.
lactea. L. *
Diapenſia helvetica L. * (32)
Aretia alpina L. *
punctata. * (33)
Azalea procumbens L. *
Hottonia paluſtris L. *
Cortuſa matthioli L. *
Coris monſpelienſis L. *

c. *Valvis decem.*

Primula farinoſa L. *
hirſuta. * (34)
Lyſimachia ephemeron L.
linum ſtellatum L. *
nemorum L. *

4. *Diangiae.*

Spigelia anthelmia L.
Vinca roſea L.
Datura metel L.
faſtuoſa L. (35)
ferox L.
Hyoſcyamus aureus L.
Nicotiana ruſtica L.
glutinoſa L.
fruticoſa L.
Verbaſcum arcturus L.
thapſoides L. *
Ipomea pes tigridis L.
tamnifolia L.
violacea L.
bona nox L.
lacunoſa L.
tuberoſa L.
curaſſavica. (36)
Evolvulus alſinoides L.
linifolius L.

5. *Tri-aut Pentangiae.*

Convolvulus lineatus L. (37)
cantabrica L. *
ſcammonia L.

(32) *Diapenſia helvetica* L. cum *Androſace lactea* omnino ad ARETIAE genus pertinent.

(33) *Aretia foliis craſſis rugoſis gramineis, ſcapis multifloris* HALL. *hiſt. n.* 619 *t.* 17.

(34) *Primula foliis ciliatis dentatis, ſcapo paucifloro* HALL. *hiſt. n.* 613.

(35) *Stramonium aegyptiacum flore pleno intus albo foris violaceo* TOURNEF. *inſt. p.* 1 8 *Miſc. Taur. Tom. II. p.* 55.

(36) *Convolvulus ſcammonii folio ſubrotundo flore albo umbone nigro curaſſavicus* HERM. *par. bat. cat. p.* 6.

(37) *Convolvulus ſerpens maritimus ſpicaefolius* TRIUMF. *obſ. p.* 91, & *Miſc. Taur. p.* 55.

umbellatus L.
ſoldanella L.
cneorum L.
purpureus L.
batatas L.
pes caprae L.
carolinus L.
jalapa L.
Lobelia cardinalis L.
ſiphilitica L.
inflata L.
urens L.
Jaſione montana L. *
Phyteuma hemiſphaerica L. *
orbicularis L. *
pauciflora L. *
ſcheuchzeri. * (38)
Campanula perfoliata L.
hybrida L. *
rapunculoides L. *
rotundifolia L. *
medium L. * (39)
cervicaria L. *
pyramidalis L.
elatines L. *
ceniſia L. *
alpeſtris. * (40)
rhomboidalis L. *
petraea L. (41)
barbata L. *
Trachelium caeruleum L.
Polemonium caeruleum. L.

6. *Fructu pulpoſo.*

Atropa zanoni. (42)
Nolana proſtrata L.
Solanum mammoſum L.
verbaſcifolium L.
ſanctum L.

(38) *Rapunculus foliis imis longe petiolatis caulinis linearibus integris; bracteis linearibus duabus imis longiſſimis* HALL. *hiſt. n.* 682, ſed ad hanc *Rapunculi* ſpeciem non pertinet *Rapunculus alpinus caeruleus anguſto raro ſubinde dentato folio* MICHELII *Hort. Piſ.*, & *Florent. p.* 40, & FERDINANDI BASSII *Comm. Bonon. Tom. IV. p.* 289 *t.* 1 *f.* 2.

(39) *Campanula hortenſis folio, & flore oblongo* BAUH. *pin.* 94 *Miſc. Taur. p.* 55 olim a Cl. LINNAEO cum *barbata* coniuncta.

(40) *Campanula foliis hiſpidis, caule unifloro. Spec. p.* 8 *t.* 8 *f.* 2. Hanc pro varietate *barbatae* habet Cl. HALLER.

(41) *Campanulae glomeratae* inſignis varietas videtur. Ex *M. Baldo* in Hortum Taurinenſem illata planta viva, & culta *glomeratae* omnino ſimilis evaſit.

(42) *Solanum ſpinis carens, melongenae facie, fructu rotundo* ZANON. hiſt. T. 158 Calyx, flos, & fructus, qui eſt pomum biloculare, iubent, ad *mandragorae* genus plantam hanc revocare.

paniculatum L.
carolinense L.
radicans L.
virginianum L.
aethiopicum L.
fuscatum L.
guineense L.
diphyllum L.
trilobatum L.
melanocerasum. (43)
insanum L.
capsicoides. (44)
Physalis pruinosa L. (45)
viscosa L.
Capsicum frutescens L.
baccatum L.
Lonicera caerulea L. *
pyrenaica L. *
alpigena L. *
Lycium barbarum L.
Rhamnus frangula L. *
alaternus L. *
alpinus L. *
Sideroxylon spinosum L.

B. Distylae.

Gentiana lutea L. *
cruciata L. *
punctata L. *
pneumonanthe L. *
acaulis L. *
verna L. *
bavarica L. *
Swertia perennis L. *
Stapelia variegata L.

(43) *Solanum guineense fructu magno instar cerasi* Dill. *elth. 336.* Haec solani species in vulgare nigrum cultura numquam abit ab eo distincta. Dixi *melanocerasum*, *ut guineense* nomen triviale alteri stirpi assignatum servarem.

(44) *Solanum caule aculeato fruticoso, foliis pilosis, ovatis sinuato lobatis, pedunculis unifloris.* Elegantis huius solani, cuius nullam apud Auctores mentionem video, semina ad me missa hoc anno fuerunt a Cl. Guatteri Parmensi bot. Prof. sub nomine *solani capsicoidis ex h. Patavino.* Tota planta spinosa est caule, foliis, ramis, petiolis, pedunculis, & calyce. Caules rotundi ramosi saepe longis tenuibusque pilis instructi. Folia lucide virent & iuniora undique pilosa, subtus aculeata; supra ad costam unam alteramque spinulam habent. Flos albus patens, non tamen rotatus, magnus, pendulus, quem sequitur magnus fructus laevis croceus; e caule infra folium unus aut alter pedunculus nasci solet.

(45) *Alkekengi barbadense nanum alliariae foliis* Dill. *elth. p.* 10, & *Misc. Taur. p. 56.*

hirsuta L.
Cynanchum monspeliacum L.
aphyllum L.
Asclepias nigra L.
nivea L.

VI. HEXASTEMONES.

Aloe carinata (46) Mill. n. 11.
Verucosospinosa (47) Mill.
succotrina. (48) Mill.
maculata. (49)
glauca. (50) Mill. n. 16.
margaritifera L. (51)
Hyacinthus muscari.
comosus L. *
serotinus L.
botryoides L. *
Asphodelus luteus L.
fistulosus L.
ramosus L. *

Convallaria bifolia L. *
Dracaena draco L.
Aristolochia longa.

VII. OCTOSTEMONES.

Daphne gnidium L. *
Diospyros virginiana L.
Vaccinium oxycoccos L.
myrtillus L. *
vitis idaea L. *
uliginosum L. *

VIII. ENNEASTEMONES

Rheum compactum L.

IX. DECASTEMONES.

Cotyledon orbiculata L.
Jatropha gossypifolia L.
curcas L.
Adoxa moschatellina L. *

(46) *Aloe Africana sessilis foliis carinatis verrucosis* DILL. *elth. p.* 10.
(47) *Aloe Africana humilis, spinis inermibus, & verrucosis obsita* Comm. *prael. p.* 77.
(48) *Aloe succotrina angustifolia fl. purpureo* Comm. *hort.* 1. *p.* 91.
(49) *Aloe Africana calescens foliis spinosis, maculis ab utraque parte albicantibus notatis* Comm. *hort.* II *p.* 9.
(50) *Aloe Africana foliis glaucis margine, & dorsi parte superiore spinosis fl. rubro* Comm. *prael. p.* 75.
(51) *Aloe Africana folio in summitate triangulari margaritifera flore subviridi* Comm. *hort.* II *p.* 10.
Pro varietatibus aliarum aloes speciebus habet Cl. LINNAEUS, sed mihi videntur constanti foliorum forma, habitu atque etiam floribus distinctae species, quas in Horto Gottingensi distinxit Cl. HALLER.

Anacardium occidentale L.
Arbutus unedo L. *
    uva urſi L. *
    alpina L. *

X. POLYSTEMONES.

Mimoſa plena L.
    aſperata L.
    caſta L.
    nilotica L.
    arborea L.
Poterium ſanguiſorba L. *
    hybridum L.
    ſpinoſum L.
Styrax officinale L. *

CLASSIS II.

Plantae flore monopetalo floſculoſo.

I. ANTHERIS DISJUNCTIS

Dipſacus ſativus.
Scabioſa cretica L.
    ucranica L. (52)
    tranſylvanica L. *
    prolifèra L.
    gramuntia L.
    africana L.
    ſilvatica L. *
    palaeſtina L.
    marilandica. (53)
Globularia cordifolia L. *
    alypum L. *
    nudicaulis L. *
Cephalanthus occidentalis L.

(52) *Scabioſa foliis planis carnoſis, inferioribus pinnatis, ramorum integerrimis linearibus* GMEL. *lib. II. p.* 213, & *Miſc. Taur. p.* 58.

(53) Hoc nomine ex Anglia primum, deinde etiam ab amico optimo Ioh. MARSILLI Bot. Prof. Patavino miſſa ſcabioſa eſt diffuſe ramoſa ſimilis ucranicae, ſed ab ea vere differens. Humilior eſt foliaque habet omnia pinnata. Flores uniformes vix inaequales ſegmentis erectis, quinquefidi, breviores calyce floris, qui petiolatus eſt in quinque ariſtas rigidas rubentes florem ſuperantes diviſus. Calix fructui immediate impoſitus membranaceus planus 5 dentatus, & dentibus longe ariſtatis. Eſt ne *ſcabioſa divaricata* Cl. JACQUIN in horto Vindobonenſi? Decernere non licet cum ſplendidum hoc opus nondum poſſideam. Noſtrae ſeminibus reſpondent ſemina ab hoc Illuſtri viro ſub hoc nomine accepta, quae in horto ſata non germinarunt.

Parthenium hyſterophorus L.
Ambroſia trifida L.
elatior L.
maritima L. *
peruviana. (54)
Xanthium ſtrumarium L. *

II. ANTHERIS COALITIS.

A. Capitatae.

Sphaeranthus indicus L.
Onopordon arabicum L.
acaulon L.
Cynara humilis L.
carduncullus L.
Arctium carduelis L.
Carduus ſyriacus L.
paluttris L. *
tuberoſus L. *
tataricus L. *
caſabonae L.
ſerratuloides L. *
acaulis L. *
defloratus L. *
pyrenaicus L. *
eriſithales J. *
Serratula glauca L.
coronata L. *
centauroides L.
babylonica L.
Carthamus lanatus L. *
Atractylis cancellata L. *
Cnicus cernuus L.
oleraceus L. *
Carlina acanthifolia. * (55)
lanata L. *
Centaurea glaſtifolia L.
orientalis L.
phrygia L. *
argentea L.
ſicula L.
ſplendens L. *
alpina L. *
nigra L. *

(54) *Ambroſia caule perenni fruticoſo, foliis ſubtus tomenroſis bipinnatis, pinnulis pinnatifidis, exterioribus majoribus.* Jam decem abhinc annis in h. T. vivit fragrantiſſima haec Ambroſiae ſpecies, cujus ſemina *Ambroſiae peruvianae* nomine tranſmiſit Cl. Bernardus Iuſſiaeus.

(55) *Carlina acaulis foliis tomentoſis ſemipinnatis, plicatis, pinnis ſemi bilobis pungentibus.* In alpibus valdenſium frequens eſt haec Carlinae ſpecies Acaulis uniflora, magnum habens florem, cujus lucidae ſquamae albae ſunt. Folia onopordi. Ejus integram deſcriptionem dabo in Enum. ſtirpium Pedemontii. Nequit eſſe *pyrenaica* L., cui Cl. Auctor caulem tribuit multiflorum, atque folia decurrentia.

ſempervirens L. *
rhapontica L. *
cineraria L.
conifera L. *
amara L. *
benedicta L.
uniflora L. *
lippi L.
pullata L.
triumfetti (56)
tingitana L.

B. Discoideae.

1. *Semine nudo.*

Carpeſium cernuum L. *
Tanacetum crithmifolium L.
Cotula grandis L.
turbinata L.
aurea L.
Artemiſia arboreſcens L.* (57)
annua L.
rupeſtris L. *
glacialis L. *
crithmifolia L.
valleſiaca * (58)
lobelii * (59)
Filago germanica L. *
leontopodium L. *

2. *Semine pappis coronato.*

Gnaphalium ſylvaticum L. *
orientale L.
undulatum L.
luteo-album L. *
obtuſifolium L.
uliginoſum L. *
ſupinum L. *
alpinum L. *
Chryſocoma linoſyris L. *
coma aurea L.
cernua L.
Eupatorium Chinenſe L.
Conyza ſquarroſa L. *
ſaxatilis L. *
rupeſtris L.
Baccharis ivaefolia L.
Tuſſilago alpina L. *
frigida L. *
alba L. *

3. *Sem. ariſtis coronato.*

Ageratum altiſſimum L.

(56) *Cyanus alpinus maior foliis inciſis* Triumf. *obſ. p.* 26. *A Centaurea montana* differt non modo foliis conſtanter profunde pinnatifidis; verum etiam ciliis ſquamarum albis, quae nigra in *montana* ſunt.

(57) *Abſinthium arboreſcens* Lob. *ic.* 753, & *Miſc. Taur. p.* 58.

(58) *Artemiſia foliis tomentoſis multifidis, floribus erectis longe ſpicatis pene ſeſſilibus* Hall. *hiſt. n.* 128.

(59) *Abrotanum odoratum humile denſe fruticoſum* Lob. *ic.* 769.

cony-

conyzoides L.
Xeranthemum annuum L. *
Bidens bullata L. * (60)
Spilanthus oleraceus L.
Athanasia annua L.
crithmifolia L.

C. RADIATAE.

1. *Sem. nudo.*
a. *Placenta paleacea.*
Helianthus tuberosus L.
divaricatus L.
Buphthalmum aquaticum L. *
spinosum L. *
maritimum L. *
salicifolium L. *
Silphium perfoliatum L.
alternifolium. (61)
Siegerbeckia occidentalis L.
Achillea magna L. *
macrophylla L.
erba rotta. * (62)
atrata. *
ligustica. * (63)
Anthemis cota L.
cotula L. *
valentina L.
Anacyclus valentinus L. *
creticus L.
b. *Placenta nuda.*

(60) *Bidens foliis ovatis, & tripteris, caulibus hirtis brachiatis* HALL. *gott. p.* 383., & *Misc. Taur. p.* 59.

(61) *Silphium foliis alternis, ovatis, sinuatodentatis, subtus asperis, radicatibus longissime petiolatis.* Altitudine sua, & florendi forma ad *perfoliatum* accedit, sed pluribus differt, quod ad fructificationem simile. Semiflosculos habet aureos bidentatos, & calycem floris ex squamis trium ordinum omni ex parte appressis, cum in *perfoliato* duorum ordinum sint, & in summo solutae, & reflexae. Caulis in *alternifolio* teres glaber: semina radii in *alternifolio* duabus aristis instructa.

(62) *Achillea foliis cuneiformibus, integris odoratis, in apice dentatis spec. pedem. Tom. II. f.* 4.

(63) *Achillea foliis pinnatis, pinnis acute pinnato dentatis, planis, glabris.* In maritimis Liguriae provenit perennis haec achilleae species. Caules sunt sublignosi, cubitales, foliosi, & ramosi, striati, glabri aut subhirsuti. Folia caulina, & maiora pinnata pinnulis aequaliter cum nervo confluentibus; ramea simpliciter pinnato dentata, dentibus plerumque simplicibus, qui in caulinis maioribus saepe dentem unum accessorium habent. Flores in extremis ramis umbellati albi. Semiflosculi albi tridentati cordati. Odore vehementi *Achillae agerati* donatur.

Milleria quinqueflora L.
Othonna cheirifolia L.
Polymnia uvedalia L.
Calendula pluvialis L.
hybrida L.
Chryſanthemum alpinum L. *
millefoliatum L.
italicum L. (64)

2. *Sem. pappis coronato.*

Aſter amellus L. *
tenellus L.
acris L. *
divaricatus L.
annuus L.
radeſcanti L.
Inula crithmifolia L. *
ſalicina L. *
montana L. * (65)
bifrons L. *
oculus chriſti L. *
Erigeron bonarienſe L.
acre L. *
phyladelphicum L.
ſiculum L.
alpinum L. *
viſcoſum L. *
foetidum.
Senecio aegyptius L.
doria L.
viſcoſus L. *
doronicum L. *
elegans L.
ſylvaticus L. *
lividus L.
byzantinus L.
ſiculus. (66)
Solidago uniflora. * (67)
flexuoſa L.
alpina L. *
Arnica montana L. *
ſcorpioides L. *
cluſii. * (68)
Doronicum bellidaſtrum L. *

3. *Sem. ariſtis coronato.*

Arctotis triſtis L.
Zinnia multiflora L.
pauciflora L.
Verbeſina alata L.
pſeudoacmella L.
acmella L.
nodiflora L.
Coreopſis leucanthema L.
bidens L. *
tripteris L.

(64) *Chryſanthemum italicum* Linn. *ſiſt. nat. n.* 10, & *Chryſanthemum achilleae n.* 22 unam, & eamdem ſtirpem conſtituunt.
(65) *Aſter montanus hirſutus* Lob. *ic.* 350, & *Miſc. Taur. p.* 60.
(66) *Iacobea ſicula chryſanthemi facie* Bocc. *rar. p.* 66.
(67) *Solidago foliis tomentoſis ovatis*, & *ſemipinnatis* Hall. *hiſt. n.* 70.
(68) *Arnica foliis ovatis alternis integerrimis* Hall. *hiſt. n.* 91.

lanceolata L.

D. Planipetalae.

1. *Sem. nudo.*
a. *Placenta. nuda.*
Lapſana zacintha L. *
b. *Placenta paleacea.*
Scolymus hiſpanicus L. *
2. *Sem. pap. aut ariſtis coronato.*
a. *Placenta nuda.*
Leontodon hirtum L. *
Hieracium aurantiacum L. *
dubium L. *
kalmi L.
ſabaudum L. *
paludoſum L. *
villoſum L. *
cerinthoides. L.* (69)
glaucum * (70)
ſtaticifolium * (71)
taraxaci L. *
intybaceum. J.* (72)
Crepis ſibirica L.
alpina L. *
rubra L.
biennis L. *
pulchra L. *
dioſcoridis L. *
auſtriaca L. * (73)
Hyoſeris hedypnois L.

(69) Vere differt a Hieracio *villoſo L.* cui caeteroquin ſimile eſt. Foliorum ſuperior ſuperficies glabra, & in ambitu tantum piloſa Calyx fere calyculatus, ex ſquamis linearibus acutis in apice compoſitus, nigris brevibus denſiſque pilis hirtus, non habens villum ſericeum, uti *Hieracium villoſum* L.

(70) *Hieracium foliis lanceolatis glaucis, caule brachiato multifloro* Hall. em. 11 n. 96. A ſequenti omnino eſt diſtinguendum, folia longiſſime elliptica acuto fine, glauca, obiter denticulata, ambitu, & coſta piloſa. Calyx ovatus, ex ſquamis multorum ordinum denſe appreſſis, viridibus, in ambitu tomento albicantibus: ſemina aliquantum incurva, oblonga, ſtriata, coronata pappo ſimplici ſeſſili.

(71) *A porrifolio* L., & *glauco* ſeparandum. *Porrifolii* iconem, & deſcriptionem dedit Cl. Iacquin. *Staticifolium* folia habet remote, et obiter denticulata, concava, fere linearia, nunquam piloſa. Rami, & pedunculi ſatis ſquamoſi. Calyx calyculatus ad baſim, ſquamis parvis fere capillaribus. Calyx verus e unico ordine ſquamarum viridium dorſo obſcurius virente.

(72) *Hieracium foliis oblongis, aſperis, lanceolatis, dentatis, calyce hirſutiſſimo Hall. hiſt. n.* 41.

(73) *Eſt Hieracium Pyrenaicum* L. *β. γ. δ.*

radiata L.
cretica L. *
ſcabra L.
lucida L.
Sonchus paluſtris L. *
tenerrimus L. *
alpinus L. *
arvenſis L. *
floridanus L.
Prenanthes purpurea L. *
altiſſima L.
Lactuca canadenſis L.
ſcariola L. *
ſaligna L. *
auguſtana. * (74)
Scorzonera picroides L. *
graminifolia L.
Tragopogon picroides L.
porrifolium L. *
crocifolium L. *
dalechampii L. *
lanatum L.
Geropogon glabrum L. *
hirſutum L. *

b. *Placenta ſquamis diſtincta.*

Seriola aethnenſis L. *
Hypochaeris radicata L. *
Catananche lutea L.

c. *Placenta villoſa.*

Andryala integrifolia L. *
ſinuata L.
lanata L. *

CLASSIS III.

Plantae flore dipetalo.

Circaea alpina L. *
Callitriche verna L. *
autumnalis L. *
Muſa paradiſiaca L.

CLASSIS IV.

Plantae flore tripetalo.

Commelina erecta L.
communis L.
Phoenix dactylifera L.
Hydrocharis morſus ranae. L. *
Stratiotes aloides L.
Aliſma parnaſſifolia L. *
ranunculoides L. *
Sagittaria ſagittifolia L. *
Triglochin paluſtre L. *
Empetrum nigrum L. *

(74) *Lactuca foliis integris, dentatis, acute hamatis, coſta laevi.* Naſcitur in valle *Auguſtae praetoriae.* Niſi fuerit *Lactuca longo, & valde anguſto folio* BAUH. *hiſt.* 11. *p.* 999. *Sive Lactuca folio oblongo, acuto* BAUH. *pin.* 123. non memoratur, *ſed* BAUINORUM brevis deſcriptio, & icon omnino non reſpondent.

CLASSIS V.

Plantae flore tetrapetalo cruciformi.

I. TETRASTEMONES.

Ptelea viscosa L.
trifoliata L.
Cornus succica L.
Potamogeton compressum L.*
gramineum L. *
perfoliatum L. *
densum L. *
Trapa natans L. *
Oldenlandia corymbosa.
Ludwigia alternifolia L.

II. HEXASTEMONES.

A. SILICULOSAE.

Draba aizoides L. *
pyrenaica L. *
hirta L. * (75)
muralis L. * (76)
Lunaria annua L.
Myagrum orientale L.
paniculatum L.
perenne L. *
rugosum L. *
saxatile L. *
Vella frutescens L.
annua L.
Iberis rotundifolia L. *
saxatilis L. *
pinnata L. *
cretica L.
garexiana * (77)
Alyssum utriculatum L. *
gemonense L.
alpestre L. * (78)
campestre L. *
argenteum * (79)
Clypeola maritima L. *

(75) Ad hanc stirpem referendae sunt *Draba austriaca* L., *stellata*, *incana* L., & OED. *ic.* 242. Folia enim pro locorum varietate modo integerrima sunt, hirsuta, ant tomentosa; alias autem ampliora, pene glabra, & dentata.

(76) *Myagroïdes subrotundis serratis foliis*, *fl. albo* BARREL. *ic.* 816.

(77) *Iberis perennis foliis linearibus*, *obtusis*, *integerrimis*.

(78) *Clypeola perennis incana*, *foliis subrotundis*, *calyce deciduo*, *siliculis ovato acutis Misc. Taur. p:* 62. 55.

(79) *Alyssum argenteo folio*, *flosculis luteis*, ZAN. *hist. p.* 16. *Differt ab Alysso montano*, cui proximum est, caule annuo ramoso, habitu ramoso erecto, foliis supra viridibus, petalis ovatis non incisis, fructu subrotundo plano non emarginato, semine

Peltaria alliacea L. *
Cochlearia draba L. *
Lepidium ruderale L. *
virginicum L.
alpinum L. *
perfoliatum L.
petraeum L. *
ſpinoſum A. (80)
cardamines L.
Thlaſpi perfoliatum L. *
montanum L. *
alpeſtre L. *
Biſcutella auriculata L. *
didyma L. *
Anaſtatica hierochuntica L.
Bunias cakile L. *
aegyptiaca L.
balearica L.

B. Siliquosae.

Iſatis luſitanica L.
Ricotia aegyptiaca L. (81)
Dentaria pentaphyllos L. *
bulbifera L. *
Sinapis laevigata L. *
pubeſcens L.
erucoides L.
braſſicata L.
juncea L.
pyrenaica L. *
incana L.
orientalis.
Braſſica erucaſtrum L. *
eruca L. *
alpina L. *
Arabis alpina L. *
pendula L.
turrita L. *
canadenſis L.
bellidifolia L. *
caerulea. * (82)
ſcabra. * (83)

marginato membrana phaenicea, plano. *Alpeſtre* autem humilius argenteo eſt, & decumbit, atque perenne eſt cauliculis plurimis ſimplicibus, habet folia magis rotunda, ſiliquam ovato acutam drabae inſtar, aliquantum tumentem, ſemina non marginata.

(80) Eſtne *Lepidium didymum* L.?

(81) *Lunaria foliis pinnatis, foliolis laciniatis*, Roy. *Leid.* 33.3 *et Miſc. Taur. II. p.* 62. *n.* 57.

(82) *Leucojum foliis oblongis, dentatis, ſpica nutante* Hall. *hiſt.* 445. Tum haec, cum bellidifolia ad Arabis genus non videntur pertinere.

(83) *Arabis multicaulis foliis radicalibus, ſcabris, dentatis, dentibus ciliatis.* Hall. *hiſt. n.* 453.

Cardamine impatiens L. *
parviflora L. *
refedifolia L. *
afarifolia L. *
amara L. *
bellidifolia L. *
Hefperis africana L.
triftis L.
Cheirantus feneftralis L.
chius L.
annuus L.
finuatus L. *
alpinus L. *
filveftris C. *
triftis L.? * (84)
Eryfimum officinale L. *
barbarea L. *
repandum L.
Sifymbrium polyceratium L.
tenuifolium L. *
fylveftre L. *
orientale L.
pyrenaicum L. *
monenfe L. *
paluftre L. *
terreftre L.
murale L. *
barbareae L.
loefelii L.
Cleome dodecandra L.
violacea L.
pentaphylla L.
arabica L.
gigantea L.
Gledifia triacanthos L.
inermis L.

III. OCTOSTEMONES.

Oenothera parviflora L.
fruticofa L.
pumila L.
Gaura biennis L.
Ruta chalepenfis L.
Moerhingia mufcofa L. *

(84) *Cheiranthus caule ramofo, diffufo, foliis linearibus acutis, finnato dentatis, petalis linearibus crifpis.* Totaplanta afperiufcula eft cinereo incana, & caulibus ramofis fere decumbit. Folia funt concava duobus, aut tribus dentium paribus pinnata, & finuata, ramea uno alterove dente notantur, demum integerrima. Rami in longo racemo florigeri floribus alternis feffilibus. Calyx tubulofus connivens duobus foliolis bafi gibbis. Petala linearia apice emarginata fulphureo viridia per aetatem luride purpurafcentia venofa venis fufcis, margine crifpo, denticulato. Siliqua rotunda, torofula, praelonga apice craffiori, ftigmatis divifione tantum fignata. Eft ne vere *Cheiranthus triftis* L. Sed nofter noctu non triftem, fed gratum odorem exhalat, qui accedit ad Geranii triftis fragrantiam.

Sapindus ſaponaria L.
Elatine alſinaſtrum. *
Myriophyllum verticillatum L.*
ſpicatum L. *

IV. POLYSTEMONES.

A. Monostylae.

Euphorbia peplis L. *
deudroides L. *
characias L. *
pithyuſa L. *
exigua L. *
paralias L. *
epithymoides L.
portlandica L.
linifolia. (85)
Papaver cambricum L.
argemene L. *

B. Polystylae.

Tormentilla reptans L.
Thalictrum cornuti L.
ſimplex L. *
Clematis viticella L.

CLASSIS VI.

Plantae flore tetra-aut pentapetalo papilionaceo.

I. TETRAPETALAE.

A. Hexantherae.

Fumaria veſicaria L.

B. Octantherae.

Polygala chamaebuxus L. *

C. Decantherae.

1. *Uniloculares.*

Trifolium incarnatum L. *
melil. cretica L.
melitotus indica L. *
melitotus minima. (86)
reſupinatum L. *
alpeſtre L. *
ſubterraneum L. *
alpinum L. *
fragiferum L. *
ſtellatum L. *
ochroleucum L. *
+ apulum. (87) T. spumosum L.

(85) *Tithymalus lini folio maior Italicus* Barrel. *ic.* 821.
(86) *Melitotus minima, recta lutea, ſiliquis craſſis, curtis in capitulum congeſtis, ſemine foenugraeci* Mor. *ox. n. f.* 17. *f.* 9.
(87) *Trifolium annuum apulum rotundifolium glabrum, foliis alba macula notatis, fl. purpuraſcente, calyce veſicario* Tilli Pis. *tab.* 49. *f.* 4.

ſaxatile

ſaxatile. (88)
Lotus jacobaeus L.
creticus L.
arabicus L.
peregrinus L. *
anguſtiſſimus L. *
maritimus L.
ſiliquoſus L. *
Arachis hypogaea L.
Anthyllis montana L. *
cytiſoides L.
Medicago marina L. *
circinata L.
laciniata L.
arborea L.
muricata L. *
Ononis fruticoſa L.
minutiſſima L. *
cherleri L. *
criſpa L.
foetens * (89)
columnae * (90)
viſcoſa L.
alpina * (91)
Cytiſus ſeſſilifolius L. *
cajan L.
hirſutus L. *
argenteus L. *
nigricans L. *
ſupinus L. *
auſtriacus L.
Geniſta canarienſis L.
germanica L. *
candicans L. *

(88) *Trifolium ſaxatile hirſutiſſimum* Bauh. *prodr.* 143. Ex radice caules plures ramoſi procumbentes trium, aut quatuor unciarum longitudine. Foliorum vaginae ſtriatae amplexicaules caudatae. Foliola ex ovatis cordata, emarginata, nervoſa, denticulata ſubtus ſubincana. Capitula florum axillaria, & terminalia, laxa; calyces molli, & denſo tomento tecti, non inflati, dentibus rectis, non reflexis. Naſcitur in ſummis alpibus Tarantaſiae.

(89) *Anonis ſpinis carens purpurea* Bauh. *pin.* 329. *Anonis non ſpinoſa* Clus. Conſtanter inermis, ramis, & calyce praeſertim multum villoſis. Folia mollia, ſubtiliter piloſa. Ramos ſpica florum terminat. Flores gemini petiolati; fructus calyce brevior hirſutiſſimus. Vexillum reflexum fere planum, carina angulo obtuſo inflexa. In ononide vulgari ſtipulae longe minores, hamatae; fructus minus hirſutus calyce longior, carina floris ad angulum rectum inflexa. Flores ſolitarii.

(90) *Ononis lutea ſilveſtris minima* Col. *ecphr.* 1. *p.* 304.

(91) *Ononis glabra inermis vaginis foliorum criſtatis, pedunculis longiſſimis unifloris ſpec. ped T. X. f.* 3.

sagittalis. L. *
sibirica. L. (92)
hypericifolia L. *
radiata L. *
Phaseolus maximus L.
radiatus L.
farinosus L.
Dolichos biflorus L.
lignosus L.
unguiculatus L.
minimus L.
Hedysarum coronarium L. *
caput galli L. *
maculatum L.
junceum L.
alpinum L. * (93)
canescens L.
hirtum L.
gangeticum L.
Vicia pisiformis L. *
onobrichioides L. *
lathyroides L. *
hybrida L.
biennis L.
sepium L. *
cracca L. *
bithynica L. *
Ervum monanthos L.
Orobus pyrenaicus L. *
Lathyrus angulatus L. *
hirsutus L. *
sylvestris L. *
tuberosus L. *
setifolius L. *
odoratus L.
annuus L.
palustris L.
heterophillus L. *
Pisum ochrus L. *
arvense L. *
Colutea frutescens L.
perennans J.
Indigofera psoraloides L.
glabra L.
Erythrina crista galli. L.
corallodendrum L.
Abrus precatorius L.
AEschinomene sesban. L.
Crotalaria retusa L.
verrucosa L.
incana L.
juncea L.
alba L.
Clitoria ternatea L.
Coronilla cretica L.
argentea L.

(92) Indicatur in Catal. plantarum horti Turicensis. Videtur differre a *Genista tinctoria* L. caule perenni, fruticoso, 5. aut etiam sex pedum altitudinem habente.

(93) *Hedysarum alpinum*, & *obscurum* L. unam, eamdemque plantam constituunt.

glauca L.
juncea L.
minima L. *
valentina L.
Ornithopus ſcorpioides L. *
compreſſus L. *
perpuſillus L.
Hippocrepis comoſa L. *
multiſiliquoſa L. *
Lupinus varius L.
luteus L.
Scorpiurus vermiculata L. *
muricata L. *
Phaca alpina L. *
auſtralis L. *
2. *Biloculares.*
Aſtragalus ſulcatus L.
campeſtris L. *
tragacantha L. * (94)
monſpeſſulanus L. *
boeticus L.
hamoſus L. *
galegiformis L.
cicer L. *
ſeſameus L.
onobrichis L. *
microphyllus L. *
contortuplicatus L.
alpinus L. *
depreſſus L. *

II. PENTAPETALAE.

Spartium ſpinoſum L. *
Pſoralea pinnata L.
glanduloſa L.
paleſtina B. (95)
Cercis canadenſis L.
Anagyris foetida L. *
Caſſia obtuſifolia L.
marilandica L.
tora L.
nictitans L.
emarginata L.
liguſtrina L.
planiſiliqua L.
Poinciana pulcherrima L.

(94) Tragacantham, quae ad maris litus naſcitur, eamdem cum *alpina* plantam eſſe Cl. viri affirmant. Nollem ab his ſummis viris diſſentire, cum non liceat illius cum noſtrate perfecta ſpecimina comparare; reperio folia *maritimæ* ſericea eſſe, non hirſuta, minora, & ſubrotunda.

(95) Novam hanc *pſoraleae* ſpeciem debeo praeſtanti, & amiciſſimo viro FERDINANDO BASSIO, qui eam in *Commentariis Bononienſibus* deſcripſit.

CLASSIS VII.

Plantae flore pentapetalo, & Gymnodispermae.

A. SEM. AD PLACENTAM COMMUNEM CONJUNCTIS.

Eryngium amethystinum L. *
alpinum L. *

B. MANIFESTA UMBELLA.

1. *Sem. gibbis striatis.*
a. *Petalis aequalibus.*

Phellandrium mutellina L. *
aquaticum L. *
Bunium bulbocastanum L. *
Ligusticum peregrinum L. *
nodiflorum * (96)
ferulaceum * (97)
Sium nodiflorum L. *
latifolium L. *
Sison ammi L.
segetum L.
amomum L. *
Cicuta virosa L.
Anethum pusillum. (98)
Cuminum cyminum L.
Selinum silvestre L. *
palustre L. *
carvifolia L. *
monnieri L.
Bupleurum odontites L. *
rotundifolium L. *
ranunculoides L. *
stellatum L. *
fruticosum L.

(96) *Angelica alpina ad nodos florida* TOURN. *inst.* 313.

(97) *Ligusticum alpinum perenne ferulae folio, floribus albis* SEGU. *Veron. II. p.* 41. Nostram stirpem accurate refert icon. cl. SEGUIERII, atque consentit descriptio. Involucrum autem universale habere negat cl. SEGUIER., sed cum facile caduca sint, verisimile est illud praestantem hunc Virum idcirco non adnotasse. Habet autem involucrum universale, & particulare. Fructus tribus costis acutis, semialatis in dorso percurritur. *Ligusticum* SEGUIERII citatum ad SELINUM *carvifoliam* suam refert cl. LINNAEUS, sed huius SELINI nomine aliam a stirpe SEGUIERII celeb. LINNAEUM intelligere probant ea pauca, quae ad indicandam stirpem afferuntur.

(98) Simile est *Anetho graveolenti*, sed palmaris altitudinis, & pusillum, an mera varietas? Video commemorari in *catalogo plantarum horti Turicensis.*

gerardi. * (99)
Athamanta cervaria L. *
meum L. *
ſibirica L.
b. Petalis inaequalibus.
Carum Bunius L. *
Seſeli annuum L. *
ammoides L.
elatum L. *
pumilum L. *
hippomarathrum L.
pimpinelloides L. *
montanum *
pratenſe C. *
ſaxifragum L. *
Pimpinella peregrina L.
aniſum L.
Oenanthe crocata L. *
prolifera L.
globuloſa L.
Echinophora ſpinoſa L. *
Conium africanum L.
rigens L.
Ammi majus L. *

copticum L.
Coriandrum ſativum L.
teſticulatum L. *
aquilegifolium. (100)
2. *Sem. gibb. & alatis.*
a. *Alis duabus.*
Angelica atropurpurea L.
b. *Alis quatuor, & ultra.*
Laſerpitium ſimplex L. *
gallicum L. *
mutellinoides C. *
Aſtrantia minor L. *
3. *Sem. planis alatis.*
Paſtinaca lucida L. (101)
Tordylium anthriſcus L. *
officinale L. *
nodoſum L. *
latifolium L. *
Heracleum ſibiricum L.
Ferula communis L. *
nodiflora L. *
Thapſia villoſa L.
garganica L. (102)
4. *Sem. aſperis.*

(99) *Bupleurum involucris, & involucellis pentaphyllis acutis, foliolis lineari ſubulatis* GER. galloprov. p. 23. f. 9.

(100) *Liguſticum alterum Lobelii* DALECH. *hiſt.* 744. Diverſiſſima planta eſt a *Liguſtico auſtriaco*, cuius ſynonimum habetur a cl. LINNAEO *Syſt. nat. p.* 211. Huius iconem, & deſcriptionem dabo in *enum. ſtirp. pedem.*

(101) *Paſtinaca folio quaſi libanotidis latifoliae* BOERH. *ind.* 1. 67., & *Miſc. Taur. p.* 67.

(102) *Thapſia, ſive turbith garganicum ſemine latiſſimo*, BAUH. *hiſt. III.* 2. 50., & *Miſc. Taur. p.* 67.

Caucalis leptophylla L. *
daucoides L. *
latifolia L. *
maritima. (103)

5. *Sem. villosis, nec rostratis.*

Daucus gingidium L. *
visnaga L.
muricatus L.
mauritanicus L. *
gumnifer. (104)

Bubon rigidius L.
macedonicum L.

b. *Sem. rostratis.*

Scandix anthriscus L. *
australis L. *

Chaerophyllum temulum L. *
coloratum L.
bulbosum L.

CLASSIS VIII.

Plantae flore pentapetalo, nec Gymnodispermae.

I. FILAMENTIS IN UNUM TUBUM CONJUNCTIS.

Waltheria indica L.
americana L.

Hermannia hyssopifolia L.

Melochia pyramidata. L.
corchorifolia L.

Geranium vitifolium L.
carolinianum L.
macrorhizum L.
ciconium L. *
althaeoides L. *
papilionaceum L.
phaeum L. *
columbinum L. *
grossularioides L.
peltatum L.
acetosum L.
moschatum L. *
rotundifolium L. *
hybridum L.
coriandrifolium L.
maritimum L.
dissectum L. * (105)
sibiricum L.

Sida crispa L.
cristata L.
rhombifolia L.
occidentalis L.
periplocifolia L.
alnifolia L.

(103) *Caucalis involucro universali diphillo, partialibus pentaphillis* GER. *galloprov. p.* 237. *f.* 10.

(104) *Daucus maritimus lucidus, gummifer* TOURN. *inst.* 308. *Pastinaca tenuifolia, lucida, gummi manans,* BOCC. *mus.* 2. *p.* 30. *f.* 20.

(105) *Geranium foliis ad nervum quinquefidis, pediculis brevioribus, caule erecto,* HALL. *helv. p.* 366., *& Misc. Taur. p.* 67.

indica L.
asiatica L.
umbellata L.
americana L.
triquetra L.
Malachra capitata L.
Napaea hermaphrodita L.
Alcea sicifolia L.
Malva capensis L.
peruviana L.
americana L.
coromandeliana L.
parviflora L.
moschata L. *
sherardiana L.
aegyptiaca L.
crispa L.
limensis L.
Lavatera triloba. L. *
micans L.
olbia L. *
cretica L.
Gossipium hirsutum L.
barbadense L.
arboreum L.
Urena lobata L.
Pentapetes phaenicea L.
Hibiscus moscheutos L.
sabdariffa L.
manioth L.
trionum L.
cannabinus L.
ficulneus L.
pentacarpos L.
malvaviscus L.
spinifex L.
laevis. (106)
autumnalis. (107)

(106) *Hibiscus glaber, foliis trilobis hastatis, fructu cylindrico calyce breviori, seminibus hirsutis.* Radix perennis, ex qua caules herbacei purpurascentes humanae altitudinis, flores singulares ex summis alis foliorum *hibisco syriaco* similes, pedunculi petiolis aliquantum longiores. Calyx exterior ex 13., aut 14. foliolis, interior inflatus campanulatus ad $\frac{1}{3}$ quinquefidus. Fructus quinquelocularis polyspermus.

(107) *Hibiscus caule herbaceo foliis ovatohastatis, asperis, calyce interiori tubulato, fructus apice recto.* Similis est *hibisco palustri*, sed altius assurgit, & autumno floret, differt foliis non laevibus, neque subtus molli tomento albicantibus; potius horizontalibus, quam deflexis. Calyx floris interior in *palustri* campanulatus, basi ventricosus, & flos roseus unguibus albis. In nostro flos albus, unguibus purpureis, substantiae firmae, nervosae. Fructus in *palustri* subrotundus, tuberosus, apice intorto, & pli-

II. FILAMENTIS BASI COALITIS.

Hypericum quadrangulum L.*
hirſutum L. *
humifuſum L. *
coris L. *
criſpum L. *
tomentoſum L. *
montanum L. *
hircinum L.
pulcrum L. *
nummularium L. *
elegantiſſimum C. *
Croton argenteum L.

III. FILAMENTIS OMNIBUS LIBERIS.

A. Tetrastemones.

Melianthus major L.
minor L.

B. Pentastemones.

1. *Monoſtylae.*

Ribes uva criſpa L.
Ayenia puſilla L.
Viola arboreſcens L. *
arvenſis * (108)
Ruppii * (109)
pinnata L.* (110)
ceniſia L. *
Impatiens balſamina L.
noli tangere L. *.

2. *Triſtylae.*

Polycarpon tetraphillum L. *
Telephium imperati L. *
Andrachne telephioides L.
Corrigiola littoralis L.
Turnera ulmifolia L.
Tamarix gallica L. *
Clutia pulchella L. *
Rhus toxicodendron L.

cato. Neutram ex his duabus hibiſci ſpeciebus apud Auctores reperire licuit. Primus *virginici*, alter *paluſtris* nomine miſſus eſt.

(108) *Viola bicolor arvenſis* Bauh. *pin.* 200., & *Mſc. Taur. p.* 68. Hanc a tricolori ſejungendam putavi, atque eamdem etiam nunc opinionem teneo, diſtinctamque propoſuit celeber. Hallerus hiſt. pl. n. 569.

(109) *Viola caule erecto multifloro, foliis ovato-lanceolatis ſerratis* Hall. *hiſt.* 562.

(110) *Viola pinnata*, quae quotannis ſemina perficit in horto Taurinenſi, imperfecta plerumque petala habet; ſemel autem, atque iterum florem perfectum monſtravit, qui reſpondet deſcriptioni, quam dedit in hiſt. plantarum doctiſſimus Haller.

glabra

glabra L.
laevigatum L.
Paſſiflora minima.
3. *Pentaſtylae.*
Statice limonium L. * (111)
ſinuata L.
ſpecioſa L.
cordata L. *
Linum tenuifolium L. *
catharticum L. *
maritimum L. *
alpinum L. *
perenne L.
narbonenſe L. *
gallicum L. *
Sibbaldia procumbens L. *
Craſſula tetragona L.
cultrata L.
obvallata L.
portulacaria L. (112)

B. HEXASTEMONES.

Frankenia pulverulenta L.

C. OCTOSTEMONES.

Acer campeſtre L. *
pſeudo-platanus L. *

D. DECASTEMONES.

1. *Monoſtylae.*
Pyrola rotundifolia L. *
uniflora L. *
minor L. *
ſecunda L. *
Rhododendrum ferrugin. L. *
Tribulus ciſtoides L.
Zygophyllum fulvum L.
Melia ſempervirens (113)
Guilandina bonduc L.
Fagonia cretica L.
2. *Diſtylae.*
Dianthus carthuſianorum L. *

(111) *Limonium maritimum majus* BAUH. *pin.* 192. & *Miſc. Taurin. p.* 68.

(112) *Craſſula portulacae facie arboreſcens* DILL. *elth. p.* 120. *t.* 110. & *Miſc. Taur. p.* 69.

(113) *Azedarach ſempervirens, & florens* TOURNEF. *inſt.* 616. habet pro varietate *Azedarach* Cl. LINNAEUS. Obſervo in *Azedarach* pinnas ſemper oppoſitas, folia lucida eſſe acutius, & minus profunde dentata, firmioris ſubſtantiae, fructus rotundos; in *ſempervirenti* pinnas non ſibi ex adverſo reſpondere, magnis dentibus ita profunde ſectas eſſe, ut etiam lobatae videantur, racemum fructuum triplo, & quadruplo longiorem eſſe; fructus ovatos.

glaucus L. *
ſuperbus L. *
alpinus L. *
virgineus L. *
monſpeliacus L. *
Saponaria lutea L. *
Gypſophila perfoliata L.
Saxifraga aſpera L. *
autumnalis L. *
ceſpitoſa L. *
Stellaris L. *
cuneifolia L. *
hypnoides L. *
androſacea L. *
caeſia L. *
multiflora. * (114)
purpurea. * (115)
oppoſitifolia L. *
biflora. * (116)

(114) *Saxifraga foliorum ora cartilaginea, caule triplicato ramoſo, petalis immaculatis*, HALL. *hiſt. n.* 977.

(115) *Saxifraga caule reptante, foliis quadrifariam imbricatis acutis glabris; an ſaxifraga alpina ericoides fl. purpuraſcente* TOURN. *inſt.*

(116) *Saxifraga foliis imbricatis, ovatis, caulibus reptantibus, bifloris*, HALL. hiſt. n. 981. Hae tres ſaxifragae *oppoſitifolia, purpurea, & biflora*, affines maxime ſunt, diverſas autem tres ſpecies conſtituunt. *Oppoſitifolia*, quae reſpondet *ſaxifragae alpinae, ericoidi fl. ceruleo*, folia habet glabra ciliata, ovata, laxe imbricata, in cauliculis confertiora; petala ovata, lineata, caerulea, aut purpuroviolacea, ſtaminibus fere longitudine petalorum. Ea, quam voco *purpuream* folia habet denſe imbricata in ramis decumbentibus, & in cauliculis florigeris diſſita, ſed glabra, apice acuto, & reflexo, caules quadrifloros, aut trifloros fere nudos, ſtylis, & ſtaminibus purpuraſcentibus petala longitudine ſuperantibus, atque haec eſt fortaſſe varietas a Cl. LINNAEO in flora lapponica memorata; petala vivide rubra ſunt, non lineata, ex ovatis longe acuta, patentia. *Biflora* autem, quam deſcripſit Cl. HALLER, & cui reſpondet icon *Oederi tab.* 34. viſcoſa eſt; habet folia non ciliata, ſed villoſa, in ſummis cauliculis potius alterna, quam oppoſita, acumine non reflexo. Flos roſeus, petalis ovatis, acutis, ſtamina tubis multo breviora, quae in oppoſitifolia petalis ſubaequalia ſunt, in purpurea petalis longiora. *Oppoſitifolia* ſolet habere caules unifloros; *biflora* duos plerumque in ſummis cauliculis ſubſeſſiles flores, purpurea tres, aut quatuor umbellatos longe pedunculatos poſſidet. Has omnes ſaxifragae ſpecies cum aliis exhibebo icone *in Enum. ſtirp. Pedemontii*.

mufcoides. * (117)
3. *Triftylae.*
Arenaria trinervia L. *
tenuifolia L. *
ciliata L. *
tetraquetra L. *
biflora L. * (118)
maritima. * (119)
lanceolata. * (120)
obtufa. * (121)
flaccida. * (122)
Cherleria fedoides L. *
Drypis fpinofa L.
Stellaria nemorum L. *
graminea L. *
Silene pendula L.
mufcipula L. *
armeria L. *
fruticofa L.
gigantea L.
noctiflora L. *
antirrhina L.
nocturna L. *
vallefia L. *
cretica L.
virginica L.
faxifraga L. *
acaulis L. *
bupleuroides L.
viridiflora L.
polyphylla L.

(117) *Saxifraga foliis mollibus, ellipticis, fubhirfutis, caule paucifloro*, HALL. *hift. n.* 985.

(118) *Alfine caule recto, proftrato, foliis ovatis*, HALL. hift. n. 877.

(119) *Maritima a campeftri* diftinctam fpeciem conftituit. *Maritima* certe decandra, *campeftris* pentandria. Flos in maritima major ex petalis ovatis, purpureis, per aetatem albidis, & diu perfiftentibus, fructus in cornu productus multum extra calycem. Semina leucophaea margine pellucido aucta. In campeftri fructus vix calyce major, femina angulata, obfcura fine ullo margine, ut alia omittam difcrimina.

(120) *Arenaria foliis, & calycibus lanceolatis, trinerviis.* Apud auctores rei herbariae defcriptam non reperi. Radix perennis cefpitofa. Cauliculi ex ramis procumbentibus eriguntur digitales, folia oppofita, erecto patentia glabra raro fubhirfuta, firma, acuto fine. Calyx ex foliolis fimilibus, fed concavis, flos patens albus, calyce paulo major, petalis integerrimis. Stamina decem, antheris purpurafcentibus.

(121) *Alfine foliis linearibus obtufis, calycibus vifcidis*, HALL. *hift.* 863.

(122) *Alfine caule flaccido dichotomo, foliis linearibus acutis*, HALL. *hift.* 864.

niceenſis * (123)
portenſis L.
paradoxa L. (124)
porrigens L. (125)
Cucubalus otites L. *
tartaricus L.
cutholicus L.

4. *Pentaſtylae.*

Coriaria myrtifolia. L. *
Sedum ſtellatum. L. *
acre L. *
daſiphyllum. L. *
reflexum. L. *
anacampſeros. L. *
ſexangulare. L. * (126)
Agroſtemma caeli roſa. L. *
coronaria. L. *
flos jovis. L. *
githago. L. *
Lychnis chalcedonica. L.
flos cuculi. L. *
dioica. L. *
alpina. L. *
Ceraſtium perfoliatum. L.
dichotommum. L.
manticum. L. *
alpinum. L. *
arvenſe. L. *
vulgatum L. *
Forskohlea aegyptiaca. L.

5. *Decaſtylae.*

Phytolacca icoſandra. L.

E. Polystemones.

(123) *Silene villoſa, & viſcoſa, foliis linearibus obtuſis, petalis ſemifidis, fructibus ovatis, calycibus decemſtriatis.* In agro Niceenſi naſcitur haec ſilene, quae ab auctoribus praetervisa mihi videtur. Caules infirmi vix erecti. Folia linearia craſſiuſcula ſulcata, caulis de more gentis in pedunculos dichotome finditur. Calyces decemſtriati ſtriis viridibus, non inflati tubuloſi, petala ſemifida coronata ſquamis ſubrotundis extus pallide flavo purpuraſcentia, intus albida, & per diem intus convoluta, ungues pallide luteſcentes. Antherae didymae luteovirides. Styli tres cum ſtigmatibus hirſutis, tota planta villoſa, & viſcoſa eſt.

(124) *Silene viſcoſa alpina, foliis omnibus planis, ac prorſus glabris, petalis anguſtis, intus candidis, extus ex viridi luteolis profunde bifidis, diviſionibus divaricatis linearibus, nectariis exſtantibus, ac tribus longiſſimis purpuraſcentibus ſub ſolo ſpiraliter convolutis,* Manetti *ſpicil. n.* 1005, *& Miſc. Taur. p.* 69.

(125) Hanc *Gypſophilae chalepenſis*, nomine jamdudum miſit Cl. Govan, ſed omnino ad *gypſophilae* genus pertinet.

(126) *Sedum foliis teretibus ternatis, caulibus ſimplicibus trifidis* Hall. *enum. n.* 107, & *Miſc. Taur. p.* 70.

1. *Monoſtylae.*
Portulaca anacampſeros. L.
racemoſa. L.
fruticoſa. L.
Ciſtus laurifolia. L. *
incanus. L. *
monſpelienſis. L. *
ledifolius. L. *
guttatus. L. *
ſerpillifolius. L. *
apenninus. L.
tuberaria. L. *
thymifolius. L. *
polifolius. L. *
aegyptiacus. L.
laevipes. L. *
ſalicifolius. L. *
ladaniferus. L.
roſens. * (127)
arabicus. L.
piloſus. L. *
Triumfletta lappula. L.
ſemitriloba. L.
Corchorus aeſtuans. L.
Capſularis L.
Prunus lauroceraſus. L.
padus L. *
pumila L.
avium L. *
Canadenſis. L.
Amygdalus pumila. L.
Pſidium pyriferum L.
2. *Diſtylae.*
Agrimonia repens. L.
Crataegus azarolus. L.
3. *Triſtylae.*
Reſeda odorata. L. (128)
phyteuma. L. *
undata. L.
Aconitum napellus. L. *
Cammarum. L. *
Delphinium peregrinum. L. * (129)
grandiflorum. L.
Paeonia officinalis. L. *
4. *Pentaſtylae.*
Aquilegia canadenſis. L.
alpina. L. *
Nigella arvenſis. L. *
Meſpylus pyracantha. L. *

(127) *Heliantathemum folio ampliori, fl. roſeo Sherard. Phil. Tranſ. n.* 383. HALL. *gott. p.* 114.
(128) *Reſeda foliis integris, floribus odoratis.* HALL. *gott.* 93, & *Miſc. Taur. p.* 70.
(129) *Delphinium nectaris diphillis, floribus ſolitariis, foliis multipartilis; foliolis lineari-acuminatis, enum. nic. p.* 200, & *Miſc. Taur. p.* 81. A *peregrino* olim ſeparavi eo, quod monophylla nectaria *peregrino* tribuiſſet Cl. LINNAEUS. Sed noſtrum eſt vere *peregrinum* Cl. LINNAEI, ut per literas etiam certiorem me fecit.

chamaemespilus. L. *
amelanchier. L. *
cotoneaster. L. *
5. *Polystylae.*
Spiraea opulifolia. L.
Helleborus hyemalis. L. *
foetidus. L. *
Potentilla alba. L. *
grandiflora. L. *
caulescens. L. *
aurea. L. *
opaca. L. *
pensylvanica. L.
valderia. L. *
intermedia. L. *
norvegica. L. (130)
Geum reptans. L. *
virginianum. L.
Fragaria sterilis. L. *
Rubus fruticosus. L. *
saxatilis. L. *
Rosa pendulina. L. *
lutea. (131)

CLASSIS IX.

Plantae flore hexapetalo.

I. DIANTHERAE.

Orchis militaris. L. *
mascula. L. *
coriophora. L. *
latifolia. L. *
abortiva. L. *
Satyrium nigrum. L. *
hircinum. L. *
viride. L. *
Ophrys spiralis. L. *
minima. L. *
Alpina. L. *
Serapias latifolia. L. *
grandiflora. L. *
lingua. L. *
longifolia. L. * (132)

II. TRIANTHERAE.

Sisyrinchium bermudiana. L.
Ixia corymbosa. L.
bulbifera. L.
crocata. L.
Wachendorfia thyrsiflora. L.

(130) *Potentilla foliis ternatis, hirsutis, caule recto, umbellifero*, HALL. *gott. p.* 108, & *Misc. Taur. p.* 224.
(131) *Rosa lutea simplex.* BAUH. pin. 636.
(132) *Epipactis foliis ensiformibus, labello obtuso, per oras plicato,* HALL. *act. helv. t. IV. p.* 111, & *Misc. Taur. p.* 72.

III. HEXASTEMONES.

MONOSTYLAE.

1. *Flore fructui impoſito.*

Hemerocallis flava. L.
fulva. L.
Amaryllis lutea. L.
belladonna. L.
atamaſca. L.
ſarnienſis. L.
Pancratium maritimum. L.
Leucojum vernum. L. *

2. *Flore fructum cingente.*

Alium fiſtuloſum. L.
Schoenopraſum. L. *
ſeneſcens. L. *
oleraceum. L. *
victorialis. L. *
magicum. L.
ampelopraſum. L.
paniculatum. L. *
chamaemelys. L.
pallens. L. *
Fritillaria meleagris. L. *
Uvularia amplexifolia. L. *
Tulipa gallica. L. *
Ornithogalum luteum. L. *
Anthericum annuum. L.
calyculatum. L. *
aſphodeloides. L.
ſerotinum. L. *
liliaſtrum. L. *
Veratrum album. L. *
Albuca major. L.
Medeola aſparagoides. L.
Peplis portula. L. *

IV. POLYSTEMONES.

Lythrum ſalicaria. L. *
hyſſopifolia. L. *

CLASSIS X.

Plantae flore polypetalo.

Cactus curaſſavicus. L.
repandus. L.
ficus indica. L.
melocactus. L.
Meſembryanthemum loreum L.
cryſtallinum. L.
ſplendens. L.
acinaciforme. L.
nodiflorum. L.
noctiflorum. L.
calamiforme. L.
deltoides. L.
barbatum. L.
uncinatum. L.
forficatum. L.
ringens. L.
tortuoſum. L.
Sempervivum arboreum. L.
tectorum. L. *
arachnoideum. L. *
montanum. L. *
Adonis autumnalis. L.
aeſtivalis. L. *
Anemone pulſatilla. L. *

ranunculoides. L. *
alpina. L.
baldensis. L. *
sulphurea. L. * (133)
halleri. * (134)
narcissiflora. L. *
Atragene alpina. L. * (135)
Butomus umbellatus. L. *

CLASSIS XI.

Plantae flore apetalo exceptis graminibus.

I. FILAMENTIS COALITIS.

Thuja orientalis. L.
Pinus sylvestris. L. *
pinea. L.
picea. L. *
cembra. L. *
Juniperus sabina. L. *
oxycedrus. L. *
Taxus baccata. L. *

II. FILAMENTIS DISTINCTIS.

A. JULIFERAE.

Salix caprea. L. *
reticulata. L. *
herbacea. L. *
retusa. L. *
Betula alba. L. *
Populus balsamifera. L.
Quercus coccifera. L. *
ilex. L. *

B. NON JULIFERAE.

1. *Monantherae.*
Hippuris vulgaris. L. *
Blitum virgatum. L. *
2. *Diantherae.*
Fraxinus excelsior. L. *
3. *Triantherae.*
Phillanthus niruri. L.
Ortegia dichotoma. * (136)
Axyris hybrida. L.

(133) *Anemone tubis caudatis, involucris multifidis foliis hirsutis, pinnatis, pinnis acute lobatis* HALL. *hist. n.* 1147.

(134) *Anemone tubis caudatis, involucris multifidis, foliis hirsutis, pinnatis, pinnis latis lobatis* HALL. *hist.* 1148.

(135) In editis alpium humilis, nec scandit. In horto culta trium, & quatuor pedum altitudinem scandendo acquisivit. Non igitur differt *Atragene clematides C.*

(136) *Ortegia dichotoma Misc. Taur. tom. III. p. 76.* Num *Ortegia dichotoma* nostra sit *Hispanica* L. statuere nondum scio, collata etiam descriptione, quam Cel. LINNAEUS dedit in postrema system. nat. editione pag. 74.

Minuartia

Minuartia campeſtris.
Mollugo verticillata. L.
Oſyris alba. L. *

4. *Tetrantherae.*

Iſnardia paluſtris. L. *
Hippophae rhamnoides. L. *
Myrica cerifera. L.
Urtica dodartii. L.
pilulifera. L. *
nivea. L.
balearica. L.
divaricata. L.
Alchimilla vulgaris. L. *
alpina. L. *
pentaphyllea. L. *
Illecebrum paronychia. L. *
achyranta. L.
Camphoroſma monſpeliaca L.*
Rivina humilis. L.
Buxus ſempervirens. L. *

5. *Pentantherae.*

Salſola fruticoſa. L. *
muricata. L. (137)
Theſium linophyllum. L. *
alpinum. L. *
Achyranthes lappacea. L.
indica.
ſicula. (138)
lanata. L.
Herniaria hirſuta. L.
Atriplex roſea. L.
ſibirica. L.
Chenopodium ariſtatum. L. *
viride. L. *
urbicum. L. *
polyſpermum. L. *
album. L. *
auguſtanum. * (139)
Amaranthus hybridus. L.
caudatus. L.
hypochondriacus. L.
graecizans. L.
albus. L. *
ſanguineus. L.
polygonoides. L.
viridis. L.
Beta cycla. L. *
maritima. L. *
Govana domingerſis. L.
Pharnaceum cerviana. L.

6. *Hexantherae.*

Smilax ſalſaparilla. L. *

(137) *Baſſia Aegyptiaca*, *Miſc. Taur. tom. III. p.* 178.
(138) *Siculam indicae* varietatem putet Cl. LINNAEUS; ſed mihi diſtinctae ſpecies videntur.
(139) *Chenopodium foliis ſubulatis ſericeis, florum glomerulis geminis*, HALLER. *hiſt. n.* 1575.

Rumex aegyptius. L.
ſanguineus. L.
aquaticus. L. *
roſeus. L.
luxurians. L.
digynus. L. *
ſpinoſus. L.
arifolius. * (140)

7. *Octoſtemones.*

Chryſoſplenium alternifolium. L. *
Polygonum penſylvanicum. L.
maritimum. L. *
viviparum. L. *
virginianum L.
ſtrictum. * (141)
alpinum. * (142)
Stellera paſſerina. L. *
Rhodiola roſea. L. *
Trianthema portulacaſtrum. L.

8. *Decaſtemones.*

Nyſſa aquatica. L.
Datiſca cannabina. L.
Scleranthus annuns. L. *
perennis. L. *

9. *Polyantherae.*

Ceratophyllum demerſum. L.*
Theligonum cynocrambe. L.*
Mercurialis tomentoſa. L.
Dalechampia ſcandens. L.
Tetragonia fruticoſa. L.
Aizoon canarienſe L.
hiſpanicum. L.
Glinus lotoides. L.

CLASSIS XII.

Plantae flore apetalo Gramina.

II. TRISTEMONES.

A. Monostylae.

Nardus ſtricta. L. *
Cenchrus racemoſus. L. *
echinatus. L. *
Lygeum ſpartum. L.
Zea mays. L.
Coix lacryma job. L. *
Cyperus flaveſcens. L. *
fuſcus. L. *
rotundus. L.

(140) *Lapathum acetoſum, ſexu diſtiactum, foliis planis, cordiformibus,* Hall. *gott. p.* 16, *& emend.* 1. *n.* 18, *& Miſc. Taur. p.* 74. *Hiſtoriae autem* Cl. Halleri *n.* 1598.

(141) *Polygonum foliis ovato lanceolatis, glabris, ſpica ſtrigoſa, vaginis ciliatis,* Hall. *hiſt. n.* 1555.

(142) *Polygonum caule erecto, foliis ovato lanceolatis, ſubhirſutis, ſpicis paniculatis,* Hall. *hiſt. n.* 1564.

papyrus. L.
glomeratus. L. *
ſpadiceo viridis. (143)
Scirpus acicularis. L. *
michelianus. L. *
triqueter. L. *
ſylvaticus. L. *
holoſchaenus. L. *
lacuſtris. L. *
maritimus. L. *
mucronatus. L. *
Eriophorum polyſtachion. L. *
varginatum. L. *
Schoenus mariſcus. L. *
nigricans. L. *
albus. L. *
compreſſus. L. *
Carex dioica. L. *
muricata L. *
remota. L. *
leporina. L. *
veſicaria L. *
flava. L. *
globularis. L. *
atrata. L. *
Typha anguſtifolia. L. *
latifolia. L. *
Sparganium erectum. L. *

B. Distylae.

Phalaris oryzoides. L. *
paradoxa. L. *
utriculata. L. *
Panicum coloratum. L.
capillare. L.
hirtellum. L. *
Phleum arenarium. L. *
pratenſe. L. *
alpinum. L. *
Alopecurus monſpelienſis. L. *
Milium paradoxum. L. *
effuſum. L. *
Agroſtis verticillata. L. *
ſtolonifera. L. *
indica. L.
miliacea. L. *
interrupta L. *
Aira caerulea. L. *
Melica altiſſima L.
Poa alpina. L. *
Gerardi. * (144)
Briza eragroſtis. L. *
Dactylis glomerata. L. *
Cynoſurus aureus. L. *
indicus L.
echinatus L. *
coracan. L.

(143) *Cyperus parvus panicula conglob., ſpicis compreſſis ſpadiceo-viridibus Segu. ſupp. p. 66.*

(144) *Poapanicula erecta, ſpiculis trifloris glabris, corollis acuminatis, calyce diplo longioribus* Ger. *galloprov. p. 91.*

Festuca amethystina. L. *
ovina. L. *
Bromus mollis. L. *
squarrosus. L. *
Stipa capillata. L. *
juncea. L. *
Arundo calamagrostis. L. *
Elymus sibiricus. L.
canadensis. L.
Hordeum zeocriton. L.
distichon. L.
Triticum hybernum. L.
polonicum. L.
repens. L. *
junceum L. *
AEgilops ovata. L. *
Andropogon hirtum. L. *
Holcus lanatus. L. *
sorghum. L.
saccharatus. L.
spicatus L.
Tripsacum hermaphroditum. L.
dactyloides. L.

III. HEXASTMONES.

Oryza sativa. L.
Juncus articulatus. L. *
bufonius. L. *
trifidus. L. *
effusus. L. *
acutus. L. *
bulbosus. L. *
niveus. L. *
compressus. J.
Acorus calamus. L. *

CLASSIS XIII.

Plantae flore imperfecto, seu potius inconspicuo.

Marsilea quadrifolia. L. *
natans. L. *
Marchantia polymorphia. L. *
Lycopodium annotinum. L. *
complanatum. L. *
Equisetum palustre. L. *
fluviatile. L. *
Ophioglossum vulgatum. L. *
Osmunda lunaria. L. *
Acrosticum maranthae. L. *
thelypteris. L. *
Pteris cretica. L. (145)
Asplenium adiantum nigrum. L. *
Polypodium fontanum. L. *
phegopteris. L. *
regium. L. *
Pteris cretica. L.

(145) *Lingua cervina foliis costae innascentibus*, TOURN. *inst.* 544.

REFLE-

JOHANNIS FRANCISCI CIGNA DE ELECTRICITATE.

Quum muneris mei ratio jam longius a generali physica me avocet, & temporis mei partem anatome, partem aegrorum cura sibi vindicet, constitui subsecivis horis ex adversariis meis ea depromere, quorum perficiendorum jam pauca spes superesset.

ARTICULUS PRIMUS.

De Symmeriana electricitate.

Mense aprili anni 1770 quum domum Cl. Marchionis BERSET convenissent Equites LOVERA, & DEBUTET, ut experimentis electricis operam darent, ab eorum uno observatum est phialam, quae onerata fuerat, postquam, communicatione oppositarum superficierum per arcum deferentem instituta, penitus deonerata esset, mora, & quiete paucorum minutorum novam succutiendi vim recipere, quae si rursus, instituta oppositarum facierum communicatione, deleretur, nova iterum post aliquod tempus prodiret ita tamen, ut succussiones, quae ex successive genita electricitate producerentur, pedetentim minores essent, ac tandem quocumque temporis intervallo nullae amplius haberi possent.

Quum id mihi phaenomenum a Cl. Viris humaniter narraretur, principio paradoxum, ac vix credibile visum est,

quin potius aut prima vice imperfecte deoneratam phialam fuisse, aut alium errorem admissum suspicabar.

Quum vero & phaenomeni veritatem propria observatione perspectam habuissem, & ejus caussam animo versarem, demum intellexi experimentum hoc maximam analogiam praeseferre cum alio a me alia occasione proposito, quod nempe si bina vitra in unum juncta, & instar simplicis vitri armata onerarentur, tum, instituta oppositarum facierum communicatione, inductum onus tolleretur, etsi exinde quamdiu juncta vitra perstabant, electricitatis residuae indicia nulla praeberent, si tamen ab invicem divellerentur, valde electrica se ostenderent. (1)

Inde vero colligebam electricitatum, quae in armata vitra congeruntur, partem aliam liberam ad vitrorum superficiem esse, eamque esse, quae, inducta communicatione ad aequilibrium se componens succutiat; partem aliam earum electricitatum altius in vitri poros pervadere, hanc nonnisi lente sive a vitri, sive ab aliorum coërcentium poris se expedire, ideo succutiendo ineptam esse, nec quamdiu vitra juncta perstant ullum sui indicium exhibere, quod oppositae electricitates oppositis vitris inhaerentes se invicem retineant, cohibeantque. Disjunctis vitris, sublataque earum electricitatum in se invicem actione, utramque pedetentim, ac tarde se expedire, sic signa electrica producere, & diuturnam eorum vitrorum tum ad se invicem, tum ad alia corpora adhaesionem efficere. (2)

Itaque concludebam in novo hoc experimento eodem fere modo rem se habere. Electricitatum scilicet, quae in phialam congerebantur, partem eam, quae ad ipsius phialae superficies libera erat, inducta communicatione, se ad aequi-

(1) Miscel. tom. III §. 62.
(2) Ib. §. 69, 70.

librium componere, ac ſuccutere; eam vero, quae altius in vitri poros penetraverat, quaeque eorum reſiſtentia irretita erat, nonniſi lente prodire, prodeuntem in armaturas paullatim colligi, collectam novae ſuccuſſioni efficiendae aptam eſſe.

Ut igitur experimentum iſtud ex noſtra hypotheſi de Symmeriana electricitate in vitri poris deliteſcente feliciter explicatur, ſic viciſſim ab eodem novum argumentum ad eam hypotheſim fulciendam videtur accedere.

Enim vero calore vitrorum Symmerianam electricitatem augeri obſervavi, idque tum tribuebam humori, quem vi caloris expelli arbitrabar; (3) poſtquam vero cognovi ex propriis, & ex variis Anglorum experimentis vitra calore deferentia fieri (4), inde etiam meam illam hypotheſim confirmari deprehendi. Nam prout vitra majori calore magis meabilia fiunt, neceſſe eſt inductam electricitatem facilius, altiuſque in ipſorum poros pervadere, quae quum, frigefactis vitris, pari facilitate ab ipſis erumpere amplius non poſſit, pedetentim prodiens vehementiora Symmerianae electricitatis phaenomena exhibebit.

Viciſſim quo calidiora ſunt vitra, dum onerantur, eo ineptiora ſuccutiendo evadunt, ut ex Frankliniano experimento de phialis ebulliente aqua plenis. (5) Enim vero ea electricitas, quae in vitri ex calore meabilis poros irrepſit, iis poſtea irretita ſimul ac ſemel erumpere non poterit, ac ſuccutiendo inepta erit. Quum igitur calor Symmerianam electricitatem augeat, Franklinianam minuat, inde utriuſque diſcrimen confirmatur.

Immo vero cenſerem vitrum, inferiori armatura conſtanter cum ſolo communicante, ex ſuperioris ſuperficiei

(3) L. c. §. 97 in not.
(4) Vid. Pryestley hiſtoire de l'electricité III p. 234.
(5) Vid. Pryestley l. c. II p. 430, III p. 307.

frictione electricum factum, atque adeo sola Symmeriana electricitate imbutum, & succutiendo ineptum, (6) imposita tamen superiori faciei, quae fricata fuit, armatura, post aliquod tempus succutiendo aptum fieri ob Symmerianam electricitatem paullatim explicatam, & in armaturis collectam.

Existimo etiam secundam, tertiam &c. succussionem eo majores futuras, quo vitrum calidius fuit, quum oneraretur, quo majus onus accepit, quo diutius id servavit, quum eae omnes conditiones majorem in vitri substantiam electrici fluidi quantitatem adigant.

Quod vero ab Anglis, ut dicebam, demonstratum est, vitrum ex calore igni electrico meabile fieri etiam antequam eorum experimenta comperta haberem, parum dissimili experimento cognoveram. Scilicet onerati vitri faciem inferiorem altera manu tangebam, superiorem extremo uno vitri tenuis quinque transversos digitos longi, cujus extremum alterum opposita manu apprehendebam: si tubus frigefactus esset, nec ictum ullum excipiebam, nec deonerabatur vitrum; si igne candefactus esset, ipsumque uno extremo forcipe prehensum extremo altero ad armaturam vitri superiorem admoverem, ictum experiebar, quo vitrum ipsum omnino deonerabatur.

Illud similiter ex proprio experimento cognoveram, quod postea a Cl. Pryestleyo observatum esse comperi; ligna quamdiu ex igne admodum calent deferentia esse. (7) Nam cilindrum ligneum recens excalefactum frustra fricabam, quamdiu calorem servabat; nec enim ullam ex eo affrictu electricitatem recipiebat, maximam vero ex frictu acquirebat, postquam susceptum calorem amisisset.

(6) Vid. Miscel. tom. III §. 71.
(7) Pryestley III p. 233.

ARTICULUS SECUNDUS.

De experimentis electricis in poculo metallico institutis.

Experimenta quaedam narrat PRYESTLEYUS in poculo ſtanneo electrico unius menſurae (*une pinte*) capaci a ſe inſtituta ex Franklini monitu, per quae compererit fila, aut globos ex ſubere intra id vas electricum demiſſa ex ipſius electricitate nec commoveri, nec ſe invicem repellere, inde educta electricitatem aliquam, ſed exiguam oſtendere, eo tamen majorem, quo remotius a fundo latera vaſis contigiſſent. (8) Phialam vero, cujus exterior armatura poculi fundo incumberet, uncus manu hominis ſolo inſidentis detineretur, ex congeſta in poculum electricitate non onerari, aut minimum onus recipere. (9) Ex quibus concludit attractionem poculi electrici attractioni ſphaerae cavae ſimilem eſſe, nec corpora electricitatem ex una parte recipere poſſe, niſi in partem aliam ipſam emittere queant. (10)

Ad horum phaenomenorum cauſſam perſequendam, mihi aptiſſima machinula viſa eſt, quae ex metallico filo ad utrumque extremum acuminato, & ad contrarias partes flexo, tum ſupra apicem metallicum librato conficitur, (11) quaeque vi fluidi electrici per acuminatos apices erumpentis eadem ratione in gyrum agitur, qua Segneri molendinum ab erumpente aqua circumvolvitur. (12) Hujus itaque electrici molendini motus ad fundum vaſis metallici

(8) III p. 461, 462.
(9) Ib. p. 462, 463.
(10) Ib. 463, 464.
(11) Vid. PRYESTL. l. c. II p. 435, 436.
(12) Vid. mem. de l'Acad. de Berlin tom. X p. 227 & ſeq.

explorare adgressus sum. Usus vero sum vase metallico perampl, caldario scilicet aheno aliquot pedes alto, totidemque amplo. Hisce experimentis humaniter interfuit, immo ipsorum aliqua aut excogitavit, aut perfecit Vir ingeniosus, & in mechanica versatissimus Eques DEBUTET, quae hujusmodi sunt.

Experimentum primum.

Machinulam ad fundum aheni constitui, ut cum ipso communicaret; ahenum vero undique insulatum erat. Electricitatem ope fili metallici a catena ad ahenum, vel ad machinulam duxi. Nulla inde machinulae rotatio, quod videbatur convenire cum sententia eorum, qui affirmant corpora ad metallici vasis fundum nullam electricitatem recipere: hinc enim proclive est concludere machinulam electricam non fieri, nec propterea in gyrum agi posse.

Experimentum secundum.

Quum vero dubitarem, machinulam electricam quidem fieri, sed ideo non moveri, quod fluidum electricum ab ejus acuminatis extremis in latera aheni aeque electrici ferri non posset, proindeque quiescere non quidem electrici fluidi defectu, sed quod hoc ipsum fluidum intra eamdem omnino stagnaret, coronam ex charta inaurata confeci diametro unius pedis, aut ultra, eamque circa molendinum ita constitui, ut molendinum ejus centrum occuparet. Corona haec nec cum molendino, nec cum aheno communicabat, sed per filum metallicum in hominem solo insidentem electricitatem, si quam reciperet, disperdere poterat. Rebus ita constitutis, & electricitate ad ahenum impulsa molendinum pernicissime in gyrum ageba-

tur. (13) Oportuit ergo molendinum a fundo aheni electricitatem recipere, quum ex eadem per acuta extrema in ambientem metallicam coronam emissa in gyrum ageretur. Falsum igitur corpora ad fundum vasis metallici nullam electricitatem recipere, sed potius dicendum, eorum electricitatem ab aequali laterum ipsius vasis electricitate ita reprimi, ut motum nullum habeat, sicque suae praesentiae indicia nulla praebeat.

Quod si educta corpora vix ullam electricitatem ostendunt, id indicio est ea corpora, dum educerentur, acquisitam electricitatem amisisse verosimiliter ex eo, quod lege a Cantono, & AEpino detecta (14), fundus, & latera vasis in ea corpora jam ab ipsis disjuncta contrariam electricitatem inducere nitantur, proindeque receptam ejusdem nominis electricitatem ab iisdem expellere.

Experimentum tertium.

Machinulam ad fundum aheni supra poculum vitreum parum altum insulavi, ut sic parum ab ejus fundo abesset. Ahenum item insulatum erat. Electricitatem ad machinulam deduxi, quin ahenum ullam reciperet. A recepta electricitate in gyrum acta est, paullatim vero ejus celeritas imminuta est, ut tandem omnino quiesceret: tum per admotum digitum ab aheno scintillam eduxi, inde molendinum pristinum motum, pristinamque velocitatem recepit, quae paullatim languens, nova ab aheno educta scintilla, restaurata est, & ita deinceps.

Ex quo apparet, ex electricitate machinulam ad fundum aheni in gyrum agi, dum per acuminata extrema in aheni

(13) Experimentum hoc proposuit Eques DEBUTET.
(14) Vid. PRIEST. l. c. II p. 18, & seq.

latera machinula ſe exonerat: prout latera aheni ex congeſta electricitate magis reſiſtunt fluido ab iis extremis advenienti, & ejus fluidi fluxum, & machinulae celeritatem retardari; demum fluido aeque denſo in aheni parietibus exſiſtente ac in ipſa machinula jam nullum ejus fluxum a machinula ad ahenum fieri poſſe, ſicque machinulam quieſcere niſi, educta per admotum digitum aheni electricitate, novae electricitati a machinula excipiendae ipſum ahenum iterum aptum evadat.

Experimentum quartum.

Machinula, ut prius ad fundum aheni inſulata eſt, ut tamen ex ipſa ad manum hominis ſolo inſidentis filum deduceretur. Ahenum item inſulatum eſt. Electricitas autem ad ipſum ahenum deducta. Continuo molendinum in gyrum actum eſt eadem velocitate, eademque directione ac prius, ſive electricitas ad ahenum deducta poſitiva eſſet, ſive negativa.

Ut igitur in priori caſu ex electricitate ab acuminatis extremis machinulae in aheni latera effluente machinula in gyrum agebatur, ita in poſtremo hoc ab electricitate ex aheni lateribus in acuminata machinulae extrema adveniente haec ipſa machinula movebatur. Ex quo confirmatur differentiam inter electricitatem machinulae, & laterum aheni, aut ambientium corporum eam eſſe, quae fluxum electrici fluidi ab ipſa, aut in ipſam efficiat, ſicque eamdem in motum agat.

Confirmatur item, quod alio experimento jam conſtiterat, (15) contrarium motum fluidi modo erumpentis, modo ſubeuntis per extrema machinulae eamdem tamen directionem ipſi machinulae impertiri.

(15) PRIEST. l. c. II p. 435, 436, III p. 137, 138, 140.

AR-

ARTICULUS TERTIUS

De AEPINI *experimentis, in quo aërea lamina electrico vapore oneratur.*

Elegans AEPINI experimentum de aërea lamina oneranda in hunc modum inſtitui.

Tabulas ligneas binas amplitudinis pedum $8 \frac{1}{3}$ charta inaurata cooperui, alteram alteri ſuperpoſui ſitu parallelo, ut faciebus inauratis ſibi mutuo obverterentur. Inaurata charta ſuperioris tabulae ab inferiore ejus facie in ſuperiorem producebatur, quo commodius electricitatem a globo advenientem recipere poſſet. Tabulis hiſce interpoſui fruſtula vitrorum diverſae craſſitiei, ita ut inauratae facies modo 11 lineis, modo 19, modo 36 diſtarent. Ad minimam eam 11 lin. diſtantiam onerabantur armaturae, vel ſi mavis lamella aërea ipſis interpoſita, modo tempeſtas valde ſicca eſſet, indeque ſuccuſſio & ictus ſatis validus habebatur. Si tempeſtas minus ſicca, minuſque opportuna experimento eſſet tabulae ad 19 lin. diſtantiam conſtituendae erant, ut onerari poſſent, ictumque praebere, qui minor etiam, quam in praecedente diſtantia percipiebatur. Si demum tabulae ad 36 lin. diſtantiam collocarentur, armatura quidem inferioris tabulae contrariam ſuperiori electricitatem recipiebat, ut, inſulata inferiori ea tabula, facile deprehendebatur, ſed ita exigua utriuſque armaturae electricitas erat, ut ſenſibilem ictum non praeberet.

Quando lamella aërea onerabatur, conſtanter obſervavi, quod ab AEPINO jam fuerat animadverſum, electricitatem armaturae ſuperioris cum globo communicantis vehemen-

tiorem fuisse contraria electricitate oppositae armaturae communicantis cum solo.

Quando vero tabula inferior insulata erat, ejusque communicatio cum solo per admotam manum perficiebatur post inductum onus auferendam, tunc alterno tabularum contactu observabam scintillas ab ipsis eliciendas celeriter decrescere. Scilicet attactu superioris armaturae non solum excessum ipsius electricitatis supra electricitatem inferioris armaturae auferebam, sed multo etiam plus, ita ut ejus electricitas electricitate inferioris armaturae multo minor evaderet. Vicissim quum inferiorem armaturam tangebam, non solum ejus electricitatem electricitati superioris aequabam, sed multo minorem etiam efficiebam, ut sic duobus, tribusve alternis hujusmodi attactibus totam penitus electricitatem exstinguerem.

Et haec quidem inaequalitas electricitatum etiam in onerato vitro deprehenditur. Notum enim est corpus ex filo serico pendulum inter binas armaturas vitri onerati, & insulati tamdiu oscillare, donec electricitas penitus exstincta sit. Verumtamen si inter oppositas electricitates absoluta aequalitas requireretur, nunquam eo modo vitrum exonerari posset: nam ubi ad eam aequalitatem perventum esset, pendulum quiesceret, nec ex una armatura electricitatem haurire posset, nisi eodem tempore par quantitas electricitatis ex opposita armatura educeretur.

Quae omnia ab AEpino feliciter explicantur. (16) Enimvero determinata quantitas electricitatis intra datam armaturam seorsim spectatam colligi potest; sed hujusmodi electricitas exigua est, si comparetur cum illa, quam eadem armatura recipit, quando oppositae armaturae contraria electricitate attrahitur, ac retinetur, quae tamen attractio

(16) Vid. Pryest. II p. 90.

eo minor eſt, quo oppoſita armatura contrario modo electrica magis remota eſt, craſſiorique coërcente corpore ab eadem ſeparatur. Jam vero quando lamella aërea oneratur, oppoſitae armaturae ad ingentem, ut vidimus, diſtantiam collocari debent, ne oppoſitae electricitates per ipſum aërem ſponte permiſceantur. Hinc modica eſt contrariarum electricitatum in ſe invicem actio, perinde ac in craſſiori vitro contingit; propterea, ut electricitates in armaturas tanta quantitate congeri poſſint, quae mediocri ictui ſufficiat, neceſſe eſt amplitudinem earum augere, unde electricitas, quam ſingulae per ſe recipere poſſunt, major evadit, & ſenſibilem acquirit proportionem ad eam, quae ex electricitatis contrariae in oppoſita armatura reſidentis actione allicitur.

Hinc mirum non eſt priori electricitate (quam per ſe, & ſeorſim ſpectatae ſingulae armaturae recipere, & emittere poſſunt) ex una armatura per attactum ſublata, ſenſibilem inter electricitates oppoſitas differentiam naſci, & ex alterno hujuſmodi contactu cito omnem electricitatem exſtingui. Hinc etiam intelligitur, cur homo, ut advertit AEpinus, qui hujuſmodi aëream laminam inſulatus deonerat, electricus reperiatur eadem electricitate, quam ſuperior armatura poſſidebat, in quam adveniens electricitas congeſta eſt.

Porro quaeſitum eſt, num ſuccutiens electricitas in armaturis reſideret, an in coërcente corpore, quod armaturis interjicitur. Argumenta alibi adduxi, ex quibus conſici videtur revera in armaturis poſitam eſſe. (17) His alia addidit PRIESTLEYUS, quae eamdem opinionem confirmant. (18) Quum vero maximum argumentum, quo

(17) L. C. Tom. III §. 75 & ſeq.
(18) L. C. III a p. 434 ad 440.

contraria opinio fulcitur, ex FRANKLINIANO experimento desumatur de vitro onerato, cujus armaturae si certa lege auferantur, mutenturque, succussio nihilo minor habetur. Hinc peropportunum fore existimavi ad hanc quaestionem dirimendam, si e converso iisdem manentibus armaturis, mutataque interjecta iisdem coërcente lamina, succussio haberi posset; quumque id in lamella aërea commodissime fieri posse praeviderem, in eum maxime finem elegans AEPINI experimentum, ut superius exposui, iterandum suscepi.

Itaque aëream laminam, ut prius, inter oppositas armaturas oneravi; dein omnem apparatum ex uno in aliud cubiculum transtuli: qua translatione, & motu omnis aër armaturis interjectus mutari debuit; & tamen nihil inde succutiendi vim debilitatam esse observavi. Unde videtur confirmari succutientes electricitates, in armaturis praesertim, positas esse.

Equidem in animo habebam oleum phiala tenui, lataque includere, cujus oppositae planae, ac latae facies deferentes essent, reliquae partes coërcentes, oleum sic inclusum onerare, postea vas leniter agitare exploraturus, num sic electrica succutiendi vis deleretur. Verumtamen quum oleum fluidum, ac divisibile, perinde ac aër, sit, propterea & ingens crassities, & maxima amplitudo in olei lamella similiter ac in aërea requireretur, ut sensibile onus reciperet: hinc nonnisi vasis peramplis ad hoc ipsum paratis tale experimentum perfici posset (19).

Taurini die 13 julii 1773.

(19) PRYESTLEYUS absque successu olei laminam onerare tentavit l. c. III p. 245.

JOHANNIS FRANCISCI CIGNA

DE RESPIRATIONE.

Quum olim caussam investigarem cur flamma in intercluso aëre deficiat, & intereat rei affinitate adductus sum, ut caussam quoque inquirerem, cur animalia ab intercluso aëre similiter enecentur. Quo factum est, ut in varias quaestiones incurrerem ad respirationem pertinentes, & varia etiam ad eas solvendas inirem experimenta, quae omnia eo ordine exposui, quo se mihi primum obtulerunt. Quum eadem recolerem, ac retractarem, existimavi equidem, si in meliorem ordinem digererem, & cum aliorum Cl. Virorum experimentis conjungerem, & compararem, magnum inde praesidium erui posse ad multas & difficillimas, de hac re quaestiones elucidandas. His itaque mihi incumbendum constitui, neque verebar, ne cuipiam fortasse viderer in argumento parum anatomico, atque adeo a munere meo alieno versari, de respiratione agens, quum non modo nemo illorum, qui universum anatomes ambitum complexi sunt, principem hanc actionem humani corporis praeterire potuerit, sed & maximi hujus aetatis anatomici WINSLOVIUS, FERRENIUS, HALLERUS *ipsam*

ex proposito, & peculiaribus quidem opusculis persequuti sint; quum FANTONUS *cathedrae nostrae anatomicae ornamentum & decus non solum in dissertationibus anatomicis eleganter, & ingeniose, ut cetera, id pertractaverit, sed peculiarem etiam librum pollicitus sit, in quo multa ex iis problematibus, quae nunc ego adgredior, sibi solvenda proposuerat.* (*) *Si vir eximius pro ea, qua excellebat, ingenii acie, & ubertate doctrinae, quod promiserat perfecisset, perexiguus sane meis disquisitionibus locus relictus esset, quemadmodum ex iis, quae in dissertationibus anatomicis interspersit, quae quidem mihi saepe erunt laudanda, conjectare licet. Hi vero qualescumque conatus nisi praestabunt, ut lucubrationes tanti viri minus desideremus, at saltem meam in perutili studio diligentiam significabunt. Meliora fortasse, certioraque fuissem allaturus, si varia, quae in hanc rem mihi tentanda proposueram, experimenta exsequi potuissem, sed aliis aliisque curis distractus usque adeo distuli, dum Regia Societas quintum hoc volumen prope editura esset. Quare occasionem captare constitui meditationes has, quoad fieri potuit emendatas, evulgandi, accuratiora imposterum, & ex propriis experimentis, & ex doctorum virorum animadversionibus allaturus.*

(*) Anatomia corporis humani p. 351.

CAP. I.

De Problemate HARVEJANO, *& de caussa inchoandae respirationis.*

I Olim problema doctis viris HARVEUS proposuit, qui „ fiat, ut foetus in lucem editus, & membranis inte- „ gris opertus, & etiamnum in aqua sua manens aliquot „ horas citra suffocationis periculum superstes sit, idem ta- „ men secundinis exutus, si semel aërem intra pulmonem „ attraxerit, postea ne momentum quidem temporis absque „ ea durare possit, sed confestim moriatur; similiter, quum „ in sectione caesarea foetus horis compluscculis post matris „ obitum eximitur, vitalis tamen reperitur, simulac vero „ eo semel gavisus fuerit, etiam in easdem secundinas re- „ positus, illico ob hujus carentiam suffocetur. (*a*)

II Ex eo tempore plerique anatomici ejus problematis solutionem adgressi sunt. Et quidem alii infantes a matre divulsos respiratione carere non posse docuerunt, quod ejus sanguinem aëre imbutum non amplius accipiant, sicque respiratione egeant, qua sanguini necessariam aëris quantitatem haurire possint. (*b*) Censuerunt alii inductam spirandi necessitatem mutationi in pulmonibus factae tribuendam esse, qui prius densi, aqua graviores, ex respiratione se-

(*a*) *Certum est per nostra, & per magnorum dudum virorum experimenta foetus nuper ex utero matris excisos, inque amnio relictos mediis in aquis vivere, neque perire, nisi eo tempore, quo alioquin credibile fuerit tenerum animal aliunde periturum, post aliquot nempe horas, aut altero demum die* Cl. HALLER el. phys. III p. 314. *Veritas facti ab Harveo propositi confirmatur sectionibus caesareis, & memorabili exemplo Vanderwiel de milite, qui uterum cum foetu e gravida exclusum ad tribunum detulit, ubi solutis membranis vivus puer lucem vidit,* BERGERUS de nat. hum. lib. II cap. 3 p. 499.

(*b*) BORELLUS de mot. anim. prop. cxviij.

mel inchoata variores levioresque evadant; ea nempe ex mutatione fieri, ut jam sanguinem copiosius admittant, qui per ipsos trajici absque respiratione non possit. Propterea ex ejus sanguinis congestione animalia suffocari, quum primum spirandi facultas iisdem adimitur. (*c*) Sunt qui obliquitatem ovalis foraminis ductusque arteriosi in suffocationis caussam adduxerunt, (*d*) aut a respiratione dilatata pulmonalium arteriarum orificia. (*e*) Sunt qui eam suffocationem tribuerunt occlusioni ovalis foraminis, ductusque arteriosi, propter quam, praetermisso pulmone, sanguis circulum obire amplius non possit. (*f*) Sunt demum qui velint foetum in utero ab aëris pressione non affici, nec eidem sustinendae vires ejus sufficere, nisi respirando elasticum aërem hauriat, qui exteriori aëri contranitatur: hinc, nisi respiret, ab externa pressione suffocari. (*g*)

III Ad primum quod spectat non video, cur foetus a matre sejunctus, & intra amnion relictus respiratione carere possit; posteaquam aperto amnio semel respiravit, amplius non possit. Neque enim credibile est membranas a matre separatas sanguinem aëre imbutum foetui suppeditare: similiter foetus caesarei, qui vivi educuntur, humores novo aëre imbutos a matre jam mortua, atque adeo non respirante excipere non potuerunt. Addit BERNOULLIUS, si ex hac caussa morerentur, quibus spirandi facultas adimitur, tardius saltem esse interituros. (*h*) Demum PITCARNIUS observat, catulum, obstructo ore, & sublata re-

(*c*) TRUSTON de respir. usu diatriba a p. 104 ad 107.
(*d*) Idem l. c. p. 107, 108.
(*e*) Vide apud HALLERUM l. c. p. 315, 316.
(*f*) DIONIS Anatom. de l'hom. p. 445: Qui homines quosdam strangulationis vim elusisse putat, quod vias foetus adhuc apertas sanguis repetere potuerit. Eadem est opinio BERNOULLI in disputatione, quae exstat in collect. HALLERIANA p. 638.
(*g*) BERGERUS l. c. p. 499.
(*h*) L. c. p. 625, 626.

spira-

ſpiratione, haud minus perire, licet per tranfuſionem ſanguinem interim commutet cum alterius animalis libere ſpirantis ſanguine, ſicque ſanguinem accipiat aëre divitem (*i*).

IV Ad alterum reſpondet Celeber. HALLERUS haud ita ſubito, nec ex paucis reſpirationibus recens nati pulmonem mutari; quin imo etiam poſt pluſculas reſpirationes avium pulmonem ne quidem natare. (*k*) Quoniam vero mora in variori aëre paullatim pulmones iterum denſiores evadunt (*l*), haud impoſſibile eſſet, aëre paullatim ad majorem raritatem perducto, ac interim per partes renovato (*m*), priſtinam pulmoni denſitatem reſtituere, atque adeo animalia a ſpirandi neceſſitate liberare, ſi ab ea ſola cauſſa haec neceſſitas penderet.

Obliquitas ductus arterioſi, & ovalis foraminis, obſervante DAOUSTENE (*n*), a reſpiratione non mutatur, augeturve, nec propterea in cauſſam afferri poteſt, cur ſemel coepta reſpiratio ejuſdem perennandae neceſſitatem inducat.

V Dilatatio arteriarum pulmonalium augebit quidem ſpirandi neceſſitatem, ſeu eamdem urgentiorem efficiet; ſed quum ea mutatio a paucis reſpirationibus exſpectanda non ſit, idcirco primae illius neceſſitatis, quae poſt paucas reſpirationes naſcitur, cauſſa eſſe nequit.

Nec etiam phoenomeni explicatio peti poteſt a clauſo foramine ovali, ductuque arterioſo, quae nonniſi progreſſu temporis, diuturniorique reſpiratione demum clauduntur (*o*).

(*i*) De cauſſis diverſ. molis §. 19. Id etiam experimentum a DUVERNEYO refertur. Oeuvres anatom. II p. 82.

(*k*) L. c. p. 314.

(*l*) GUIDEUS tranſ. philoſ. n. 122 MUSSCHEMB. in Florent. p. 51, 52 not. 2.

(*m*) Vid. Miſc. Taur. II p. 180.

(*n*) In diſput., quae exſtat in collect. HALLER. p. 689.

(*o*) BERGERUS de natur. hum. p. 498. *Quando nunc reſpiravit animal, non quidem continuo aut ductus arterioſus clauditur, aut foramen ovale* HALLER. l. c. p. 315. Confer. eumdem op. min. l. p. 440.

Poſtremo ex preſſione aëris, ac neceſſitate elaſtici fluidi in ſanguine reſpirandi neceſſitas deducenda non eſt, quum & in utero ac membranis comprehenſus foetus mediatam quidem, ſed minime dubiam aëris preſſionem patiatur, & foetus humores jam elaſtico aëre referti ſint, ut alibi conſtabit (*p*).

VI At vero longe probabilior HARVEJANI problematis ſolutio ſe offert ex obſtetricantium conſtanti obſervatione petita, qui tradunt, in partu foetum interfici, quoties funiculus umbilicalis ante caput ita propendet, ut inter ipſum, & uteri oſtium comprimatur prius, quam infans, exerto capite, & auram captare, & reſpirare potuerit (*q*), ea nimirum ex obſervatione colligitur ex intercepto placentam inter & foetum vel in ipſo utero commercio, infantem interfici, ſi interim reſpirare non poſſit. Hinc BOHNIUS exiſtimat foetus, quos vulgo mulierculae ex funiculo circa collum circumvoluto inter pariendum ſtrangulari ſibi perſuadent, non quidem ex ſtrangulatione ſuffocari, ſed potius ex nimia circumducti funiculi tenſione, aut preſſione, ex qua cum placenta commercium intercipiatur: ſiquidem reſpiratione hactenus impune caruerint, & etiam nunc carere poſſint, commercio cum placenta, quamdiu reſpirandi facultas non datur, ſine vitae diſpendio non poſſint (*r*).

VII Equidem nonnulli opinati ſunt, ſublato cum placenta commercio, reſpirationem tantopere neceſſariam evadere ex eo, quod foetus, qui ſanguinem matris aëre refer-

(*p*) Vid. infra cap. III.

(*q*) ROEDERER art. obſt. p. 99, 198, 296, 306!, 307. Funiculus etiam a pectore aut pelvi contra uteri oſtium compreſſus, intercepto ſanguinis circulo, foetum interficit (ib. p. 112). Eadem obſervatio a MERYO propoſita fuerat (Mem. de l'Acad. T. X), & a MAURICEAUX (Malad. des fem. cap. xxxvi) MONRO (eſſais d'edimb. II p. 196) HEBENSREIT (puthol. funic. umbil, §. 10.)

(*r*) Infantic. p. 358.

tum excipere nequit, nisi respirando aërem hauriat, quo ipsius humores imbui possint, ex penuria aëris in eisdem humoribus moriatur (*s*). At eam alii opinionem gravissimis difficultatibus premi superius observavimus. Quare longe verosimilior hujus phoenomeni explicatio videtur, quam tradidit DAOUSTENC ex mechanica necessitate deductum, scilicet ligatis arteriis umbilicalibus majorem resistentiam opponi sanguini in inferiorem aortam influenti, qui prius libere in placentam effundebatur: hinc sanguinem in aorta inferiori congestum resistere sanguini per ductum arteriosum advenienti, qui propterea majori nisu in pulmonales ramos irruat. Similiter ligatam venam umbilicalem efficere, ut copia, & impetus sanguinis in dextram auriculam advenientis minor sit, qui propterea facilius coërceri possit ab aucta jam copia sanguinis per pulmonales venas in sinistram auriculam influentis; ex utraque vero caussa impetum & copiam sanguinis ad pulmonem tantopere augeri, ut absque respiratione transmitti non possit: hinc ex sanguine in pulmonibus cohibito, ac congesto infantem suffocari, nisi per respirationem explicato pulmone ipsius trajectus adjuvetur liberiorque reddatur (*t*).

VIII Sic etiam ob ligatas arterias umbilicales oppletioni pulmonum, & capitis, recens natos infantes obnoxios esse olim COWPERUS adnotavit (*u*), & ex eadem porro caussa *sanguis inferioris aortae arterias pelvis pedumque di-*

(*s*) MERY l. c. MAURICEAUX l. c.

(*t*) In disp. quae habetur in collect. HALLER p. 688. *Interituros, qui ante pulmonum expansionem etiam nativitati proximi oppressa vel strangulata vasa umbilicalia habent, quum ex altera parte, qua venam, intercepto ejus flumine, ventriculi cordis anterioris vacuitas, ex altera autem parte, qua arterias, oppressis earum canalibus, plenitudo ventriculi cordis posterioris, ac depletio ejus impedita, hinc subitanea mors necessario consequatur.* HEBENSTREIT l. c. § 9.

(*u*) In append. ad anatom. hum. corp. n. 59.

latat (*x*), *unde inferiores artus insigniter augentur* (*y*). Ex venae autem umbilicalis ligatura icterum recens natorum proficisci suspicatur Cl. MORGAGNUS (*z*). An vero ex eadem etiam caussa lac in mammis recens natorum, ex aucto scilicet sanguinis impetu in mammarias arterias?

IX Quemadmodum vero ligato funiculo augetur impetus sanguinis ad pulmones, sic vicissim per respirationem liberiori parata via sanguini in pulmonem advenienti, ejus impetus a funiculo avertitur. Hinc est, ut funiculi ligaturam licet tutiorem, minimeque omittendam, haud tamen necessariam esse Cl. viri contenderent (*a*), quod nempe sanguis multo minori impetu ad ipsum pellatur, postquam per respirationem explicato pulmone, in hunc copiosius liberiusque detorquetur.

X Ex quibus jam solvitur problema HARVEJANUM, cur nempe infans, ubi semel respirando aërem hauserit, eodem deinceps carere non possit, (I) scilicet per respirationem sanguis a funiculo avertitur (IX); defectu vero sanguinis, & aëris contactu tum funiculus, tum placenta refrigerantur: & immeabilia fiunt (*b*). Hinc nec sanguis

(*x*) HALLER pr. lin. §. 913, 948.

(*y*) Ib. §. 952.

(*z*) De caus., & sedib. ep. xlviij §. 60.

(*a*) Primus hanc observationem proposuit Cl. FANTONUS, (anat. corp. hum. p. 261); quae multo magis in brutis obtinet, quam in homine. Confer Cel. HALLERUM el. phys. viij p. 1 p. 441, & seq.

(*b*) Pulcherrimae sunt, & ad rem nostram apprime faciunt ROEDERERI observationes, quibus constat, extracto foetu, nec compresso funiculo, calorem primum, dein pulsum in hoc exstingui, in locis primum ab umbilico magis dissitis, inde pedetentim in propioribus; idque intra pauca minuta contingere, si placenta educta, & frigido aëri exposita sit, paullo tardius, si foetus, funiculus, & placenta intra tepidum demergantur, vel si placenta ad uterum adhuc adhaereat. Ex quibus concludit *proculdubio pulsus in fune, quum natus est infans, cessat propter novam partim circulationis in infante a respiratione rationem, partim propter externi aëris, a quo funis afficitur, contactum.* Vid. Auct. icon. uter. hum. tab. vj p. 27, 28. *Canalibus umbilicalibus refrigeratis, sanguis, quem continent, omnem mox vitalitatem deponit, & congelascit* BOHNIUS l. c. p. 381.

funiculi viam, quam ob inchoatam respirationem deseruit, repetere poterit, nec propterea infans respiratione deinceps carere (VII).

XI Hinc est, ut per respirationem recens natus novam alacritatem acquirat (*c*): sic enim sanguini aegrius, ac tardius per resistentem funiculi, ac placentae viam circumeunti nova ac liberior paratur, unde expeditior per universum corpus ipsius circuitus evadit. Hinc etiam ratio eruitur, cur debilis infans, quamdiu non respiravit citius reficiatur, si funiculus non fuerit deligatus, & cur cauti obstetricantes non prius vinciant, quum coeperit respirare (*d*), ne videlicet per ligaturam nova sanguini debiliter moto resistentia opponatur, ex qua debilis circuli vires ita opprimantur, ut metuendum sit, ne penitus fatiscant (VII).

XII Quum, intercepto per funiculum circuitu, foetus necessario pereat, nisi respiret (VI); hinc perperam nonnulli ex nodis in funiculis foetuum quorumdam repertis eos nonnisi per os nutriri potuisse concludunt (*e*). Etsi enim per os nutriri aliis argumentis satis fuerit evictum (*f*); ex ea tamen observatione sententia haec nequit confirmari: nam si nodi ejusmodi fuissent, ut sanguinis trajectum per funiculum impedirent, non solum nutrimentum sustulissent, sed & suppresso sanguinis circuitu (VII) foetum enecassent (*g*).

(*c*) Solus inter catulos caesareos robur demonstravit, qui respiraverat (HALLER el. phys. III p. 318) nova alacritas animalis post captum aërem (ib. viij p. II p. 162) si ovum serpentis frangatur, quum exclusioni proximus est, serpens apparet in spiram contortus, & immotus, sed postquum bis terve ore hiaverit, aëremque hauserit, vividos motus habet. Aër repente machinam in motum ciet. DUVERNEY l. c. p. 573.

(*d*) ROEDERER el. art. obst. p. 167, HEBENSTREIT l. c. §. 10.

(*e*) Petit Mém. de l'Acad. an. 1718 HEISTER comp. anat. p. 316.

(*f*) Vid. HALLERUM phys. el. viij p. I p. 201 & seq.

(*g*) Haec observatio MONROI est, Essais d'EDIMBOURG II p. 196.

XIII Ex propoſito igitur phoenomeno (VI , VII) conſtat, *magnam partem ſanguinis in foetu rectius ad umbilicales arterias duci , & a pulmone onus averti* (*h*), ac propterea placentam tamquam diverticulum ſanguinis conſiderari poſſe, dum pulmo ex aëris defectu nequeat dilatari (*i*). Etſi enim in oviparis deſit , hinc diverſa in ipſis oeconomia admittenda videatur (*k*). Attenta tamen obſervatio demonſtrat aliquid analogum ipſis reperiri , quod eidem officio inſerviat. Revera NEHEDAMIUS refert *in ovo etiam tunicas inſigniter craſſeſcere , & ſpeciatim in ovo anſerino albuminis tenuioris tunicam , ſub finem incubationis exiguas quaſdam carneas papulas ſibi interſperſas ubique oſtendere iis fere ſimiles , quae in equa occurrunt* (*l*). Eae igitur tunicae , & vaſa per eas diſtributa in ipſis etiam oviparis detorquere ſanguinem a pulmone poterunt , & vicariam placentae viviparorum operám praeſtare , quod confirmatur elegantiſſimis perſpicaciſſimi HALLERI obſervationibus , qui nempe vidit in pullo incubato tum demum pulmonem, & dextrum ventriculum evolvi , quum membrana umbilicalis , & rami arterioſi per ipſam diſtributi , immutabili ovi longitudine terminati , minus extenſiles evaſerunt , & magis reſiſtunt ſanguini per inferiorem aortam advenienti : ex hac enim reſiſtentia fieri cenſet Vir ſapientiſſimus , ut dextra auricula juxta derivationis leges in dextrum ventriculum facilius ſe exoneret , quam in ſiniſtram auriculam ; propterea & ipſum auriculam dextram & ventriculum dextrum , & pulmonalem arteriam evolvi ac dilatari , majoremque ſanguinis quantitatem ad pulmonem pelli (*m*).

(*h*) HALLER pr. lin. §. 924.
(*i*) NEEDHAM. de formi foetu in Bribl. MANGET 1 p. 558.
(*k*) Id. ib.
(*l*) Idem p. 545.
(*m*) *Formation du cœur* II p. 100, 101, 102.

XIV An non igitur quantitas ſanguinis ad pulmonem appellentis ſenſim aucta, tandem tanta erit, ut non neque libere abſque reſpiratione tranſmitti amplius poſſit? An non quum primum ex hac cauſſa gravari incipiet pulmo, anxietatem aliquam pullus experietur, primoſque reſpirandi ſtimulos percipiet? An non adeo tum demum incipiet reſpirare, quum ab umbilicali membrana repulſus ſanguis, majorique copia ad pulmonem delatus, quam ut commode tranſmitti poſſit anxietatis ſenſum excitare in eodem incipiet?

XV Haec aut his ſimilia in homine etiam & vivaparis locum habere obſervatio ſuadet: nam in his etiam, progrediente geſtatione, placentae ad foetum proportio minuitur (*n*), & magna pars foraminis ovalis obturatur, ut ſolus, tranſverſim ovalis, obliquus aditus liber ſit, qui in maturo foetu $\frac{1}{15}$ venae cavae vix ſuperet (*o*), ex quibus cauſſis ventriculus cordis dexter juxta derivationis leges explicatur (*p*), ſicque quantitas ſanguinis, & impetus in pulmones gradatim augetur. Quapropter non inveroſimile eſt, tum demum foetum ad reſpirandum ſollicitari, quum tanta quantitas ſanguinis ad pulmonem affluit, ut aegrius tardiuſque per ipſum tranſmittatur.

XVI Hinc aliquod robur ad illorum opinionem videtur accedere, qui foetum reſpirandi deſiderio ad exitum excitari docuerunt (*q*). Quoniam enim in utero reſpirare

(*n*) Astruc. *Art. d'accoucher* p. 210.

(*o*) Haller pr. lin. §. 922, aut ad ſummum $\frac{1}{10}$ el. phyſ. viij p. II p. 14.

(*p*) Id. pr. lin. §. 922.

(*q*) Fabricius ab Aquapendente. Vid. Harveum de partu p. 338. Pechlinus cap. xij, Bohnius circ. anat. progym. III Bergerus l. c. lib. II cap. III p. 492, Diemerbroek, anat. lib. 1 cap. XXXV p. 314 Lieutaud el. phyſ. p. 196.

nequit, quum primum majori copia ſanguinis per compreſſos pulmones difficilius traſmittendi gravari incipiet, anxius, inquietuſque evadet, primoſque in paritura pariendi ſtimulos excitabit, quae cauſſa partus a natura petita (XV) videtur confirmari obſervatione infantum, qui mortua jam matre ſponte prodierunt (*r*): neque iis difficultatibus obnoxia eſt, quibus ceterae, quae ſolent proponi (*s*), quamquam non diffitear, cauſſas etiam alias tum in ipſo foetu, tum praeſertim in matre (*t*) ad hanc actionem excitandam concurrere.

XVII Ex quibus jam conſtat, quae nam ſit primae reſpirationis cauſſa. Nempe maturus foetus, qui vel in ipſo utero jam moleſtia aliqua ex copioſius ruente in pulmones ſanguine affici incoeperit (XV), quum primum prodierit, & reſpirandi facultatem adeptus fuerit, ob idipſum reſpirabit, ut liberiori facto ſanguinis per pulmones circuitu, quum moleſtiam avertat, qui porro ſtimulus in neceſſitatem convertetur, quum ex ipſa reſpiratione, aut frigore, aut vinculo, ſublato cum placenta commercio (X), tanta quantitas ſanguinis ad pulmonem urgebitur, ut niſi reſpi-

(*r*) Harveus l. c. p. 345 Haller el. phyſ. viij P. I p. 420.

(*s*) Uti moles pondusve foetus, alimenti defectus. Vide Harveum l. c. p. 346 *Hiſt. naturel* Tom. IV p. 129. & ſeq. Diemerbroekius, qui infantem prodire contendit ex eo quod, ejus calore ſenſim aucto, tandem reſpirationis refrigeria opus habeat, haec addit „ *illum autem* „ *caloris incrementum aeque contingit in parvo foetu, qui ſatis diu in* „ *utero haeſit, quam in magno, atque hinc cujuslibet maturi foetus ſive* „ *magni, ſive parvi eadem eſt cauſſa majoris calcitrationis, & partus.* l. c. p. 314.

Neque vero opponi poteſt foetum aërem deſiderare non poſſe, cujus nullam habeat notionem (de Buffon. l. c. 124.) nam ſufficit eumdem, gravato pulmone, inquietum eſſe, ut matrem motibus ſuis ad patrem ſtimulet, idemque caecus appetitus, natum infantem ad reſpirandum incitabit, qui ad ſurgendum papillam invitat, aliaſque magis compoſitas actiones edendas, quarum nec effectum novit, nec inſtrumenta.

(*t*) Ut menſtruae evacuationis molimina De Buffon l. c.

respirare pergat, eumdem suffocari necesse sit (VII): jure igitur affirmarunt Viri Cl. ob eamdem caussam perennare respirationem, ob quam semel inchoavit (*u*); jure etiam statuerunt caussam hanc talem esse oportere, ut non fortuito, sed constanter, ac necessario animalia ad eam actionem edendam impelleret (*x*).

XVIII An igitur ob dolores, quos in partu, & post ipsum ex novi elementi injuriis infans patitur ad quiritandum, atque adeo ad respirandum impellitur (*y*)? At pullus intra ovum pipit nulla exteriori molestia affectus, & animalia etiam muta aërem captant (*z*), & hujusmodi caussa tumultuariae musculorum contractioni potius, quam ordinato respirationis motui excitando apta esset; unde Cl. FANTONUS existimare se ajebat ob voluptatem potius, quam ob dolorem animal recens natum ad respirandum impelli (*a*). An ob liberatos a pressione nervos diaphragmaticos animal primum respirat (*b*)? At in avibus, quibus nullum diaphragma, respiratio haud minus certum exordium habet (*c*). An ob nisum ad emittendas feces respiratio incipit (*d*)? At eae feces in avibus nullius fere momenti sunt (*e*), easque vel intra uterum deponere potest foetus, & reapse deponit (*f*), ut propterea meconii excretio pro effectu po-

(*u*) FANTON. l. c. p. 351 MARTIN essais d'Edimb. 1 p. 202.
(*x*) *Soli etiam casui quadrupedum, aviumque vitam committere nolim, ut motui alicui temere ex sensu incommodi facto .... Oportet autem ejusmodi caussam invenire, quae neque late pateat ac ferarum spiritalia saecla.* HALLER el. phys. III p. 317.
(*y*) BORELLUS prop. CXVII: TRUSTON l. c. p. 115, 116.
(*z*) HALLER l. c p. 316
(*a*) L. c. p. 350, 351.
(*b*) MARTIN l. c. p. 202: alii, quos recenset Cl. HALLERUS l. c. p. 317 n. 6.
(*c*) Uti adnotat HALLERUS loc. ult. cit.
(*d*) TRUSTON l. c. p. 117.
(*e*) HALLER l. c p. 316.
(*f*) *Mihi quidem non raro contigit feces in liquore amnii contentas, in ventriculumque resorptas invenire.* NEEDHAM l. c. p. 553. Similia observavit Cl. HALLERUS l. c. p. 318.

tius quam pro caussa respirationis habenda sit. An aër pondere suo in nuper nati pulmonem descendens ipsum ad respirandum sollicitat (*g*)? An potius irritatis naribus, excitataque sternutatione eumdem respirare cogit (*h*)? At nuper natum animal *non respirat, si langueat*, etiamsi *is languor ponderis necessarium effectum morari non possit* (*i*); saepissimeque non sternutat (*k*), aut certe a sternutatione respiratio exordium non ducit.

An demum motus, quo animal cibum quaerit, is est, quo veluti inscius primum aërem hauriat? At motus quo cibum quaerimus, aut deglutimus, a motu respirationis valde differt (*l*), deinde pullus statim ac exclusus est cibum non quaerit (*m*), nec infans praesertim abortivus (*n*), quum tamen a nativitate statim soleat respirare (*o*). Postremo pullus longo ante exclusionem tempore rostrum aperit, & claudit, quasi cibum quaerens, quum nonnisi postremis diebus & respiret, & pipiat (*p*).

XIX Caussa igitur respirationis est mutatio sensim nata in placenta, & corde foetus progressu gestationis, multoque magis sublatum cum placenta commercium, ex quo tanta quantitas sanguinis in pulmonem urgetur, ut absque

(*g*) Bernoullius l. c. p. 625 626. Pitcarnius l. c. §. 15.
(*h*) *L'Anatom. d'*Heister II p. 115.
(*i*) Haller l. c. p. 317
(*k*) *OEconom. animal par* M. Sigaud II p. 40.
(*l*) *Deglutiri absque respiratione adeo male negatur, ut cum respiratione deglutiri nequeat.* Haller el. phys. VIII p. I p. 201, 202.
(*m*) Aliquamdiu nutritur vitelli colliquamento. Haller form. du coeur p. 158. *Pulli ovi corticem ea parte percutiunt, qua respiratione opus habent, hoc agentes potius a respiratione, quam a cibi indigentia coacti, quum, statim ac e cortice exclusi sunt, respirent; sine cibo autem biduo, diutiusque consistant.* Fabricius ab Aquapen. l. c.
(*n*) *Massae vegetabili similis continuo somno indulget, vagitum non edit, cibum non appetit.* Roederer. el. art. obst. §. 205.
(*o*) Statim respirat vel ante septimum mensem natus. Pitcarnius l. c. §. 19.
(*p*) Jam hora 190 aperto rostro cibum quaerit (Haller for. du coeur II p. 50) quum nonnisi hora 451 primum pipiat (ib. p. 53.)

reſpiratione per ipſum nequeat tranſmitti. (XVII) Propterea canalis arterioſus, aut foramen ovale, utcumque apertum (*q*) neque ſanguinem a pulmone avertere poterit, neque animal a ſpirandi neceſſitate immunem reddere. Et quidem eae viae ſuperſtites necem a ſtrangulatione non praecavent (*r*), *& foramen ovale etiam ſi ampliſſimum numquam tamen plenum otium pulmonis faceret, quum venae cavae ſanguinem* $\frac{1}{10}$ *fere minuat* (*s*), & eaedem viae in amphibiis quibuſdam ſic dictis, & in aquaticis quibuſdam avibus, etſi perpetuo apertae maneant, ſuffocationem tamen ab intercepta earumdem reſpiratione non impediunt (*t*).

XX Qui autem putarunt ab earum viarum obſtructione ſolummodo ſpirandi neceſſitatem afferri, quum viderent in nuper natis eas vias haud ita ſubito claudi, propterea dubitarunt de veritate phaenomeni ab HARVEO propoſiti (I), nec ita ſubito fieri crediderunt, ut infans facultatem amitteret, per quam hactenus aëre carere impune potuerat (*u*); quum tamen, ut diximus, commercium cum placenta ob inchoatam ſemel reſpirationem interceptum illi facultati au-

(*q*) Quale illud a Cl. MORGAGNI obſervatum in infante quindecim dierum, in quo valvulam dicit penitus defuiſſe (l. c. ep. XLVIII §. 63) & ſimile LIEUTAUDII (*eſſai anat.* p. 326) & demum illud Albini in anu decrepita, quod cum corde increverat, & per aetatem augeri perexerat (anat. Acad. lib. I c. IX p. 34.

(*r*) *In noſtris, & aliorum experimentis apertum in homine, inque animali id foramen mortem ab aquis minime moratum eſt, neque necem a ſtrangulatione, aut a ſuffocatione ſequentem avertit* HALLER. el. phyſ. III p. 252; ſimilia iterum ib. VIII p. II p. 159. Inutilis *foret levis ille hiatus tanto ſanguini tranſmittendo.* BARTHOLIN. anat. p. 410.

(*s*) HALLER l. ul. cit. p. 14.

(*t*) Id. ib. III p. 270, & in BOERH. not. 14 ad §. 691.

(*u*) BOERHAAVE in prael. ad §. 691 inſtit. ad verbum *mutatur*. Contra DIEMERBROEKIUS ne in amnio quidem contentum equinum pullum, vel ad horae ſemiquadrantem extra uterum vivere affirmat, & erroris HARVEUM redarguit (l. c. lib. I cap. XXXV p. 315). Veroſimiliter talis eventus frigori tribuendus, cui ſecundinae extra uterum fuerunt expoſitae.

ferendae par sit (X). Alii putarunt per eas vias utcumque apertas sanguinem moveri amplius non posse ; cur autem moveri non posset, caussam quaesiverunt in earum viarum obliquitate (*x*), Alii demum eas vias sufficere censuerunt suffocationi praecavendae (*y*); imo impedito earum coalitu per frequentem recens natorum in tepidam submersionem vera amphibia effici posse sperarunt (*z*); quod tamen & me olim frustra in recens natis felibus tentasse memini, & fieri non posse proposita ratio (VI VII) plenissime evincit.

XXI Equidem eae viae foetui peculiares, si apertae maneant, quum oneris partem a pulmone avertant, etsi plenum ipsius offium facere nequeunt (XIX); efficient tamen, ut animalia paullo diutius respiratione carere possint, quam cetera, in quibus eae viae jam fuerint coalitae (*a*); ex quo apparet, cur recens nata animalia, si in-

(*x*) *Quaeritur quae sit caussa, cur intercepto infantis in lucem editi spiritu, illius sanguis, etsi per pulmones moveri nequeat, per antiquas tamen illas vias transire non conetur: hoc enim si fieret, videtur per aliquod saltem longius temporis spatium non moriturum.* THRUSTON l. c. p. 102. Vide supra 2, 3.

(*y*) Auctores supra citati §. 2, not. *f* tum MUSCHEMBROEKIUS, qui feles recens natos in vacuo inflari, prosterni, vomere, sed non mori contendit (In Florent. p. 56, col. Acad.) & alibi. *Feles*, inquit, *etiam octo diebus post nativitatem non moriuntur in vacuo, nec alia quibus foramen in corde ovale, tum canalis in pulmonibus arteriosus patet.* Introd. ad Philos. nat. §. 2166.

(*z*) *An consuetudine fieri possit, ut sanguis antiquas semitas repetat, mihi nondum compertum est, quamvis illud fieri*, sed rarissime posse urinatores, & animalia quaedam alia non contemnendo prorsus argumento sint. THRUSTON l. c. p. 110. Fieri posse, & inde amphibia parari. BOERHAAWE loco ultimo citato, & Cl. De BUFFON, qui experimentum instituit hist. natur. IV, p. 176.

(*a*) Nuper nata animalia difficilius strangulari, BOHNIUS infant. p. 355. Quum ligata fuisset aspera arteria, post 10 minuta aëre opus habebant (ex BIRCHJ HALLERUS el. phys. III, p. 316, not. *t*) aut post 24 demum horas (ex SENAC. ib. p. 314, n. *i*) quod incredibile videtur, nisi syncope, aut alia fortuita caussa accesserit. Feles recens natae 7 minutis in vacuo pereunt. BOYLE ex p. pneum. tit. IV, & de relat. inter aërem, & flam. vital. animal. exp. VI.

firmiſſima fuerint, ad horas aliquot reſpirationem non moliantur (*b*); quum enim neceſſitas reſpirationis ex vi, & impetu circumeuntis ſanguinis dependeat, atque ob idipſum ſubmerſi, ſyncoptici, convulſi homines ad tempus interdum ſatis longum reſpiratione carere poſſint, quin enecentur (*c*), eo potiori ratione hoc privilegio eos gaudere neceſſe eſt, quibus ob nondum obſtructas memoratas vias minus urgens neceſſitas reſpirationis incumbit. (*d*)

(*b*) *Quando infans languet aliquo neque minimo tempore abſque reſpiratione perdurat.* HALLER el. phyſ. III, pag. 225, 317.

(*c*) Confer HALLERUM l. c. p. 266. DIEMERBROEK l. c. lib. II cap. XIII.

(*d*) Huc ſpectare videntur hiſtoriae a BOHNIO propoſitae de recens natis puellis, quae quum ſub terram ſepultae fuiſſent, viventes inde protractae fuerunt, etſi earum altera per ſeptem horas delituiſſet (l. c. p. 355, 356) advertit ſiquidem ipſe BOHNIUS *infirmum aliquando excludi partum, ut omni ſenſu, motu, ac reſpiratione per aliquot momenta, ſeu notabile tempus deſtitui videatur, inde quaſi ſyncopizantem vitam in apricum poni.* (Ib. p. 352). Et paullo poſt. *Simile quid his fieri concipiendum, quod in hiſtericae, & hypochondriacae ſuffocationis nonnullis ſpeciebus, & animi deliquio contingere obſervamus: in his nimirum affectibus inſpirationem aëris evidenter interpolari per notabile tempus ſine vitae cum morte commutatione* (p. 354, 355.) Huc ſpectare quoque videtur ſimilis hiſtoria a BOERHAAVIO relata (prael. l. c.), niſi quod in hac relictus funiculus cum ſecundinis, & cum infante ſepultus ad eius vitam ſervandam conſpirare potuerit.

HALLERUS catellum recens natum, qui tamen reſpiraverat per dimidiam horam in tepida vixiſſe vidit, (ſur la reſp. exp. 123) & animalia recens nata diutius vim vacui ferre advertit, (el. phyſ. III, pag. 314); eademque eſt obſervatio DUVERNEY (l. c. II, p. 89) experimenta etiam BUFFON, (vid. ſupra n. X) ad diuturniorem tantum reſpirationis ſuſpenſionem pertinent, nec aliter videntur interpretanda experimenta MUSCHEMBROEKII ſuperius not. V. memorata.

C A P. II

In quo nam posita sit necessitas, in quo utilitas respirationis.

XXII Aërem respiratum non aliam ob caussam respirationi ineptum evadere ostendi, nisi ob noxios admixtos vapores, qui & animalibus infensi sint, & flammam suffocent, & odore foetido se prodant. Nam eamdem aëris quantitatem multo diutius respirationi inservire per experimenta comperi, si condensetur, quam si in majus spatium fuerit expansa, quod apprime respondet vaporum indoli, qui multo tardius per densiorem aërem expanduntur, eumque propterea tardius ita inquinare possunt, ut respirationi ineptum reddant (*e*).

XXIII Etsi autem vapores, qui respiratum aërem inficiunt, ipsius elasticitatem imminuant; hanc tamen elasticitatis jacturam noxiorum ipsius effectuum caussam haud esse demonstravi, quum & exigua sit, & in condensato, interclusoque aëre animalia moriantur quo tempore interclusi aëris pressio atmosphaerae pondere multo adhuc major exsistit, & in aperto etiam aëre, ubi non elasticitate, sed pondere aëris pulmones distenduntur, vapores exitiales sint (*f*). Addere possumus vapores alios, qui multo magis elasticitatem aëris infringunt, minus tamen esse perniciosos.

XXIV Itaque ex consideratis phaenomenis animalium in intercluso aëre exstinctorum, verosimile censui vi irritante

(*e*) Miscel. tom. II, p. 199, §. 21, 24.
„ Aër non renovatus perpetuo evadit lethalis non ob calorem, vel rarefactionem, densitatemve, sed ob aliam occultam caussam, Boer.
„ inst. §. 203.

(*f*) L. c. §. 44, 49.

eum aërem nocere, propter quam bronchia, forte etiam pulmones convellantur, & ingressuro aëri resistant; eodem nimirum nocere modo, quo BOERHAAVIUS, & SAUAGIUS mephitidis aut accensi sulphuris vapores suffocare existimarunt (*g*).

XXV Et si vero pulmones sensu, & irritabilitate carere videantur, id de externa tantum ipsorum superficie verum esse probabile est, quum interna vivido sensu instructa sit, pari modo, quo externa cordis, & intestinorum superficies parum sentit, interna exquisitissimo sensu pollet (*h*), & revera sulphuris accensi vapores, aliique, qui suffocationem afferunt, si per inspirationem hauriantur, absque damno in pectoris cavum immittuntur (*i*), quo solo experimento probatur inter sensum externae internaeque pulmonum faciei maximum discrimen intercedere (*k*).

XXVI Hactenus quidem fibrae verae carneae in ipso pulmone demonstratae non sunt; certum tamen est fibras musculares ab ipsa deorsum cartilagine cricoidea descendentes, & infra divisionem bronchiorum deductas in pulmone evanescere (*l*); motus vero pulmonis in ranis aliisque frigidis animalibus, qui etiam aperto thorace perseverat, absque hujusmodi musculari structura explicari non potest, cujus vi intrusus in pulmonem aër a pulmone ipso possit expelli (*m*).

XXVII Iis autem muscularibus fibris resolutis pulmonum actionem laedi, aut tolli innuunt experimenta in brutis

(*g*) L. c. §. 48.
(*h*) HALLER. el. phys. I p. 489.
(*i*) LANGRISH expériences sur les bêtes.
(*k*) De sensu internae membranae trachaeae, quae ipsa in pulmonem propagari videtur. Confer HALLERUM el. phys. III, p. 148.
(*l*) HALLER. pr. lin. ed. ul. §. 238 el. phys. III. p. 147.
(*m*) Confer MALPIGH in posth. p. 8, MORGAGNI advers. anat. V 29, p. 159.

viventibus instituta dum ligato nervo recurrente respiratio laeditur, & rarissima fit, quamquam ab eo nervo nihil ad septum veniat (*n*), & respiratio similiter laeditur ligatis nervis octavi paris (*o*), a quibus maxima ex parte dependet (*p*); eaque propterea laesio fibrarum pulmonalium paralysi videtur ascribenda (*q*): similiter resolutis propter cerebri morbum pulmonum fibris natum asthma tribuunt MORGAGNUS (*r*), & WILLISIUS (*s*).

XXVIII Contra a spasmodica earum fibrarum contractione id asthma oriri videtur, quod convulsivum dicitur, quodque subito invadit, & dimittit sine phlegmatis excretione, frequentesque habet recursus (*t*), quod confirmatur eorum observatione, qui si retrorsum caput moverent statim anheli fiebant; quod nimirum seri acris colluvies, quae deinceps cerebrum dissecando inventa est, dum caput reclinarent, versus nervorum pulmonalium originem relapsa illos vehementius urgeret (*u*). Ex constrictis etiam convulsisque pulmonum fibris dyspnoeam repetit RYDLEYUS, quae diu hominem vexavit, qui in cellam vinariam, ubi cerevisia fermentabat, imprudenter intraverat, quique sine tussi diu ita mansit anhelosus, ac si omnia, ut ajebat,

(*n*) HALLER in BOER. IV p. 61 n. 5, & ibid. p. 100, not. 17.
(*o*) Idem irritab. p. 225 exp. 182, & p. 226 exp. 185.
(*p*) Idem irritab. p. 231 exp. 193, BARTH. anat. p. 423, 425.
(*q*) Nam ii nervi pulmoni prospiciunt, non diaphragmati, ceterisve respirationis musculis. DUVERNEY posth. II, p. 41. Animalia sectis nervis cardiacis pereunt, quia pulmonum nervis, qui eadem vagina includuntur simul detruncatis, eorum inflammatorius tumor invadit. CHIRAC. de mot. cordis specim. analyt. a p. 105 ad 109.
(*r*) De sedibus epist. XV, §. 6, 7.
(*s*) Ex tali caussa WILLISIUS modo convulsiones repetit, modo paralyses, & harum alterutras modo in ipsis pulmonum intimis fibris, modo in diaphragmate statuit, aliisque musculis respirationi inservientibus, MORGAG. l. c. §. 5.
(*t*) De GORTER systema prax. §. 331. HALES statique des animaux exp. XII, §. 17, p. 75.
(*u*) MORGAGNI l. c, §. 4.

bat, intra pectus coarctarentur (*x*): propterea verosimile est pulmonalem etiam vaporem, quo interclusus aër inquinatur, similem bronchiorum convulsionem inducere, & animalia in eo posita ex convulsivo asthmate interire.

XXIX Ex tali autem vi irritante respirati aëris (III) etiam deducitur, cur animalia diu spiritum cohibere non possint: nempe eadem caussa, quae efficit, ut animalia in intercluso aëre intereant, efficit etiam, ut ab aëre per diuturniorem inspirationem retento suffocentur (*y*). Hinc ergo necessitas alterni inspirationis, & exspirationis motus, ut aër vaporibus inquinatus expellatur, & novo aëri per subsequentem inspirationem hauriendo locum cedat (*z*).

XXX Rem mirifice confirmat Hookianum ingeniosissimum experimentum, in quo aperto pectore, perforatisque pulmonibus, duplici folle per trachaeam aër in pulmones jugiter ita immittitur, ut, dum per pulmonis vulnera aër elabitur, novus continue impulsus succedat, sicque, & pulmonem in perpetua distensione servet, & defecturam animalis vitam diutissime sustineat (*a*).

XXXI Equidem fuerunt, qui contenderent, non esse necessarium in eo experimento, ut pulmo perforetur, aut saltem perforati pulmonis nullam mentionem habuerunt (*b*);

(*x*) Observ de asthmate p. 139, 140.
(*y*) Haller el. phys. III, p. 258, 259. Ubi calculo instituto demonstrat, tantum interclusi aëris intra datum tempus vitiari, quantum eo tempore per repetitas inspirationes haustum fuit.
(*z*) Duverney l. c. p. 84.
(*a*) Vid. Boer. praelec. I p. 452, §. 203 ad verbum *reciproce*, & IV p. I p.32 ad verbum Hookii Stewenson essais d'Edimbourg VI p. 472, 473 per integram horam animalis vitam in eo experimento sustentari. Hallerus el. phys. III p. 248 ad duas, & plures. Baglivius, qui simile experimentum instituit de fibra motrice p 294.
(*b*) Perforati pulmonis non meminit Rydleyus (obs. de asth. p. 141) ubi Hookii experimentum repetiit, nec Baglivius, sed is per intervalla aërem immisit, nec pulmones in perpetua distensione servavit (de fibra motrice app. p. 294): nec Muschembroekius; indeque factum videtur, ut observaverit experimentum non succedere, nisi follis per *aliquot reciprocationes moveatur*.

quae tamen omnino est necessaria, si diutius animalis vita per novum aërem admissum fuerit sustentanda; secus aut per vices pulmonem inflare, aut aërem alterne in pulmonem immittere, alterne ab ipso haurire, oportebit, nec propterea pulmo constanter inflatus servabitur, quo tamen inprimis ingeniosissimum hoc experimentum videtur spectare. Hanc ipsam animadversionem BOERHAAVIUS proposuit, quod nempe HOOKIUS, si diutius experimentum protrahere vellet, cogeretur fodicare pulmonem, ut, veteri aëre expulso, novum recentemque in ejus locum impelleret (c).

XXXII. Quod si in eum tantum finem experimentum instituatur, ut pulso ex pulmone sanguine in cor, sopitus cordis motus exsuscitetur in strangulatis suffocatisve animalibus, vehemens per os aëris insufflatio sufficiens erit, quum semel sufflaminatus cordis motus sponte deinceps perennet, & respirationis organa integra sint, sicque exsuscitatum motum servare queunt (d); secus ac in HOOKII experimento, in quo aperto pectore respiratio haberi amplius non potest, cui ut suppleatur, & vita sustentetur non tantum distendi pulmo debet, sed renovato assidue aëre repleri: unde omnino necessarium est, ut veteri foedatoque aëri per fodicatum pulmonem effugium concedatur, ex quo novo aëri in ipsum continue immittendo aditus patefiat.

XXXIII. Igitur exspiratio non propterea est necessaria, quod sanguis per pulmonem constanter inflatum transmitti

(c) L. c. & DUVERNEYUS II, p. 84, STEWENSON l. c., LOWERUS de corde p. 162, 163.

(d) Quo sensu interpretatus fuisse videtur HOOKII experimentum THRUSTONUS, qui ipsum comparat cum experimento CROON, quo suffocatum pullum gallinaceum, immisso per trachaeam aëre, suscitavit, & cum alio NEHEDAMII, qui stangulatum canem immisso per ductum thoracicum flatu revocavit. (DIATRIBA p. 77).

non possit (e), ut multi censuerunt, sed ut foedato aëri, ac irritanti novus, blandusque succedat. Hinc quemadmodum in hoc experimento animal, perpetuo inflato pulmone, vivit, ex eo quod aër novus assidue immittatur, sic vicissim in intercluso, nec renovato aëre perit, quamvis inspirationis, & exspirationis motus alternet. Hinc, ceteris paribus, respiratio tardior celeriorve est prout aër densior rariorve, citius, tardiusve pulmonali vapore inquinatur, & in animalibus, qui interclusum, propriisque vaporibus jam inquinatum aërem respirant, celerrima evadit.

XXXIV. Quum vero in pulmone sanguis plurimum evaporet, inde colligi potest ibidem eumdem refrigerari. Equidem in hac quaestione parum adeo consentiunt physiologorum celeberrimi, ut in sententias oppido contrarias abeant. Alii nimirum cum Galeno munus sanguinem refrigerandi pulmoni tribuunt (*f*). Alii contra in pulmone sanguinem calefieri affirmant (*g*); utrique vero ab eadem observatione discedunt: animalia omnia calida duplici cordis ventriculo, & pulmonibus instructa esse, secus vero frigida aut carere pulmonibus, aut tales habere, qui nonnisi partem sanguinis e corde ejecti excipiant, atque transmittant. Hinc qui refrigerari in pulmone sanguinem existimant, iis tantum animalibus pulmonem datum esse constituunt, quorum sanguis ob calorem, quo afficitur, re-

(*e*) Ob caussas varias apud varios auctores BORELLUM (prop. CXIX) SAUVAGIUM (effets de l'air p. 44, & seq.) & BOERHAAVE (inst. §. 619). At ex hoc ipso experimento demonstrat HALLERUS, per pulmonem constanter inflatum sanguinem commode transmitti (el. phys. III, p. 255) tum ex argumentis aliis (ib. pag. 257, 258).

(*f*) Refrigerationem pro praecipuo scopo respirationis habuit HAMBERGERUS (HALLER in BOERH. I, p. 433, not. *q*) & alii multi (apud eumdem el. phys. III, a p. 342, ad 344) tum DAOUSTENC (disp. p. 681, § 41) HUXHAM (proleg. de aëre p. IV) NEHEDAM (in biblioth. Manget. I. p. 566).

(*g*) Auctores citandi nota seq,

frigerio egens eſt (*h*). Qui contra calefieri opinantur, ideo animalia calida eſſe docent, quod ſanguis, dum per ipſorum pulmones trajicitur, plurimum caleſiat, eaque propterea frigeſcere, quorum ſanguis aut omnino non, aut ex parte tantum pulmonis vires experitur (*i*); hancque opinionem confirmant ex alia neque incerta; in pulmone maximum fieri attritum ſanguinis ad vaſa, ex quo maximus in eodem calor excitetur (*k*).

XXXV. Verumtamen attritus in pulmone non quidem major, ſed minor potius, quam in ceteris partibus: neque enim attritus aut copiae tantum, aut velocitati ſanguinis reſpondet (*l*), ſed omnino pendet a reſiſtentia viae per quam movetur, & ab exceſſu celeritatis majori minorive ſanguinis a tergo urgentis ſupra praecedentem ſanguinem, unde adverſus vaſorum latera poſterioris ſanguinis vis reflectatur. Verum in animalibus, quamdiu reſpirant, via per pulmonem omnino libera eſt, & brevis, & minimae ſunt reſiſtentiae (*m*). Hinc vis ventriculi cordis dextri ſanguinem per pulmonem pellentis multo minor a natura conſtituta eſt, quam ſiniſtri (*n*); ex quo confici-

(*h*) Boerhaave (in prael. ad §. 200, 7 ad verbum calor. I, p. 437.) (Buffon hiſt. natur. IV. p. 129 &c.)

(*i*) Plerique auctores citati nota *b*.

(*k*) Ex Halesio in ranae pulmone celeritatem ſanguinis 43 majorem eſſe, quam in reliquo corpore, hinc majorem attritum, & majorem calorem gigni (Scwenke (Hematol. p. 15). Attritum, & fluiditatem majorem in pulmone ponit Boerhaave (inſt. §. 200, 7, & 206, 208,) (& in prael. hic): Winslow (de pector. §. 154) Daoustenc (diſp. p. 547) Muschemb. (diſp. p. 612) Keillius (de ſecret. p. 60, 61).

(*l*) *Sauvages ſur l'inflam.* §. 82.

(*m*) Ex eo ipſo, quod obſervante Halesio ſanguinis velocitas in ranae pulmone 43 major ſit, ingenioſe concluſit Cl. Hallerus, minorem ibi reſiſtentiam adeſſe, quum ab eadem unici cordis vi quaquaverſus ſanguis pellatur. In Boerh. I, not. *r*. ad §. CCXV.

(*n*) Winslow de pectore §. 51.

tur exiguum in pulmone attritum haberi (*o*). Huc accedit pulmonem viſcus ſuapte natura molle, cedens, ſpongioſum eſſe, & pulmonalem arteriam ceteris molliorem, ac propterea minime aptam calori ex attritu excitando (*p*).

XXXVI Rurſus obſervat LOWERUS in HOOKII ſaltem experimento, in quo conſtanter pulmo inflatus perſtat (IX), minimum in ipſo attritum haberi, quum interim animal aeque caleat (*q*); & in pullo progreſſu incubationis calorem ex interna cauſſa naſci animadvertit STEWENSONUS, licet nulla adhuc ſit reſpiratio (*r*); & demum adnotat Cl. HALLERUS pulmone obſtructo, ulceroſo, pene deleto, morboſum tamen calorem prodire (*ſ*).

XXXVII Contra refrigerari in pulmone ſanguinem vel ipſe perpetuus frigidi aëris, ac fere immediatus, & quidem per amplam pulmonis ſuperficiem ad ſanguinem attactus, ſuadere videtur, ex quo plurimum caloris in eum aërem diffundi debet, ac diſſipari (*t*), & HALESIUS quidem quantum inde caloris ſanguini decedat, ſubductis

(*o*) Ab aëre impetum fieri in pulmonem, aut ſanguinem in eodem comminui negat BERNOULLI (diſp. p. 621) LOWERUS (de corde p. 163). Attritum in pulmone non eſſe majorem. HALLER. (el. phyſ. III a p. 235 ad 238) & parum tribuendum eſſe aëris preſſioni (ib. p. 358 n. *r*, *ſ*) nec calorem in eodem generari (ib. p. 360).

(*p*) *Contra majorem in pulmone attritum nuper Cl.* GUENET *diſſertationem ſcripſit, in qua & parvitatem viſceris, & paucitatem vaſorum, & minus ſpatium percurſum, & molliorem pulmonis arteriam conſiderat*. HALLER in addend. t. VIII el. phyſ. p. 162.

(*q*) De corde (p. 163) eadem eſt obſervatio STEWENSONI (eſſais d'Edimbourg VI, p. 472, 473, & ſeq.).

(*r*) Siquidem gallina ova deſerere poteſt per tempus, quod refrigerandis ovis ſufficeret, niſi internam caloris cauſſam haberent (l. c. p. 479)

(*ſ*) Pr. lin. §. 278, edit. ul. el. phyſ. II, p. 58, 312, 318.

(*t*) Aliqua pars caloris tranſit in aërem. HALLER. in BOER. n. *q*. ad § 200, I, p. 433, & prim. lin. § 278, calorem ſanguinis ex ſuppreſſa reſpiratione intra ſemihoram 1 273 augeri.

calculis investigavit (*u*). At non ea tantum ex caussa refrigeratur in pulmone sanguis, quod frigidum aërem contingat, sed ex eo maxime, quod plurimum exhalet; a qua exhalatione vel in ipso vacuo corpora vehementer refrigerari a Cl. CULLENIO nuper est demonstratum (*x*).

XXXVIII. Hinc provide natura videtur utramque utilitatem & refrigerii, & exhalationis pulmoni tribuisse: nam quo calor major est, eo plures etiam progigni debent partes per exhalationem eliminandae. Ex quo intelligitur cur respiratio, ceteris paribus, eo celerior sit, quo calor sanguinis major est (*y*), & item eo celerior, quo magis calor aëris ad sanguinis calorem appropinquat (*z*).

XXXIX. Inde vero phoenomenon aliud commode explicari posse videtur; quod a DOUGLASSIO est observatum: sani nimirum hominis calorem eumdem propemodum remanere, quicumque fuerit calor ambientis aëris, aut balnei, in quod homo fuerit demersus (*a*), quod sane vi-

(*u*) HAEMASTAT exp. XIII a p. 82 ad 88. Calculum hunc parvi facit SENAC. (du coeur II, p. 256): de hoc etiam HALLER. el. phys. III, p. 346.

(*x*) Vid. Miscel. II, p. 143, & seq. Inde caloris deperditio multo major HALESII aestimatione.

(*y*) Quum calescimus, magnas, & frequentes respirationes edimus; contra quum frigore vexamur, lentas, & parvas: ergo respiratio non ad calefaciendum sanguinem, sed ad eumdem refrigerandum data est. STEWENSON (essais d'Edimbourg VI, p. 479) In ardentibus febribus cum rubore faciei, respiratione frequenti, pulsu pleno, & frequenti, aperta fenestra, frigidiorique aëre respirato, rubor minuebatur; pulsus minus plenus, respiratio minus frequens evadebat, etsi stragula eadem perstarent, (id. ib.). Similia apud NEHEDAM, (in biblioth. Mang. I, p. 566).

(*z*) Si aër frigidus, respiratio sensibilis, ac fere suspensa, contra si ambiens calidus, respiratio fortior erit, ac frequentior. POISSONERIUS (traité des fiévres de S. DOMINGUE p. 25, SIGAUD. II, p. 61, 62. Similia STEWENSON essais d'Edimb. VI, p. 320, DIEMERBROEK lib. II, c. 23, p. 416.

(*a*) Essai sur la génération de la chaleur dans les animaux, qui liber ex Anglico conversus, & adjectus versioni. Differt. MARTINI p. 253, & seq. Eius observatio nuper confirmata est a BRAUNIO. Nova commen. Acad. Petrop. tom. XIII, p. 420, 423.

detur repugnare notissimis calefactionis, ac refrigerationis legibus. Nam quum intrinseca caussa in homine, aliisque animalibus assidue calorem gignat, eo plus caloris in ipso accumulari oporteret, quo minus is calor per vicina corpora dissipatur; quum vero eo minus dissipari debeat, quo ambientium calor major est, & animalis calori proximior, major propterea etiam esse deberet caloris ex interna caussa nati retentique accumulatio.

XL. DOUGLASSIUS quidem eam animalis caloris constantiam tribuit mutationi, quam ex calore subeunt vasa capillaria, quae inde dilatata laxataque minori cum attritu sanguinem transmittant, unde minor calor producatur (*b*), sed multo simplicior ex respiratione ejus phoenomeni explicatio deducitur, quum, quo calidior sanguis est, eo citatior fiat respiratio, hinc & plus sanguinis per pulmonem trajici debeat, & eodem tempore plus frigidi aëris in pulmones attrahatur citius expellendus, & plures exhalationes ex sanguine erumpant (*c*), quibus eo magis refrigeretur (IX), ut sic eadem necessitas mechanica, quae magis citato sanguinis motu citatiorem respirationis motum efficit, ut is sanguis ea majori celeritate per pulmonem transmitti possit, efficiat etiam secundario, ut idem sanguis plus caloris disperdat, sicque aequabilem fere sanguinis calorem servet. Similis in hoc sanguis mihi esse videtur ebullienti aquae, quae quocumque addito calore, ulterius calefieri nequit, dummodo evaporare possit: nam prout major calor additur, aucta proportionaliter exhalatio parem ejus quantitatem dissipat: sic pro ut sanguinis calor auge-

(*b*) L. c. p. 272, & seq.

(*c*) Minime dubium videtur aërem per respirationem renovatum evaporationem sanguinis promovere, non secus ac renovatus per ventum majorem efficit evaporationem liquorum, qui eidem exponuntur, & in HOOKII quidem experimento respirationis vices gerit artificialis ventus per pulmonem trajectus, vaporemque pulmonalem abripiens.

tur, & calor ipſe, & citatior reſpiratio (XVII) copioſiorem exhalationem producet; quare proportionaliter major fieri debet caloris deperditio, & propemodum uniformis ſanguinis calor ſervari (XVII).

XLI Illud vero propoſitam ſententiam refellere videtur, quod ſanguis venoſus arterioſo calidior per certa experimenta non fuerit demonſtratus, quod tamen eſſet neceſſarium, ut conſtaret, arterioſum ſanguinem a pulmone refluum concepti caloris partem in eo viſcere depoſuiſſe (*d*). At, ſi quod diſcrimen caloris inter arterioſum venoſumque ſanguinem eſt, illud eſt, quod ex uno tantum ſanguinis per pulmonem trajectu proficiſcitur, quum ad ſingulas circuitiones ſanguis per pulmonem agatur. Jam vero tempus, quod in unoquovis per pulmonem trajectu ſanguis inſumit, exiguum eſt (*e*), exiguamque afferre poteſt caloris jacturam (XVI). Nihil mirum igitur adeo parum inter ſe conſentire experimenta, quibus viri Clariſſimi eamdem inveſtigarunt (*f*). Perſpicuum nimirum eſt quodcumque aut in celeritate ſanguinis, dum educeretur, aut in materie, figura, calore vaſorum, quibus excipiebatur, aut in promtitudine thermometrorum, quae adhibebantur (*g*), diſcri-

(*d*) Haller in Boerh. not. *q* ad §. 200 inſtit. I, p. 433, & in prim. lin. §. 282, & el. phyſ. III, p. 346.

(*e*) Ex calculo Cl. Halleri quaelibet unda ſanguinis 12 pulſuum intervallum in pulmone trajiciendo abſolvit. In Boer. not. *g* ad §. 208, I, p. 457.

(*f*) Sanguinem venae jugularis calidiorem invenit Stevensonus ſanguine carotidis, ſed differentia nimia fuit, ut in eo experimento ſe errorem admiſiſſe auctor dubitet. Eſſais d'Edimb. VI, p. 454. Calidiorem etiam invenit David. in diſp. quae praemium Acad. de Rouen obtinuit, p. 98, frigidiorem contra duobus tribuſve gradibus invenit Schwencke hemtol. p. 30, 31, & Arbuthnot de aëre p. 60. Quum Cl. Sigaud experimentum bis coram idoneis teſtibus coepiſſet ſe nullum diſcrimen inveniſſe affirmavit. Oeconom. animal. I, p. 313.

(*g*) Notum eſt quam tarde thermometra in primis paullo majora ultimos caloris gradus excipiant, quum jam calorem ambientis medii calori proximum acquiſiverunt.

discrimen experimento turbando suffecisse, & alium aliumque exitum producendo (*h*). Etsi vero paucos tantum caloris gradus singulis per pulmonem circuitionibus sanguis amittat, quum tamen pluries in hora universa sanguinis massa eam viam relegat, id vel satis esse poterit ejus fervori temperando, eidemque intra certos limites continendo (XIX): sic intra certos limites contineretur calor penduli ex calidiori medio in frigidius oscillantis, etsi discrimen ex quovis itu vel reditu productum parum sensile esset. Profecto videretur natura temere pulmonem calidis praesertim animalibus concessisse (XIII), si ad calorem moderandum nihil pulmo conferret.

XLII Illud etiam propositae opinioni adversari videtur (*i*), quod animalia vivere possint in aëre ipsorum sanguine calidiori (*k*). Ut animalia in eum aërem translata aequalem primum ipsi calorem concipiant necesse est, quemadmodum cetera inanimata corpora in eum immersa, mox ex continuata actione caussae nativum in ipsis calorem producentis novo calore cumulabuntur, quo ambientis calorem superabunt; quum vero ambientis calor jam consueto major, & animalibus incommodus sit, si interim novam hanc caloris accessionem, quam ex interna caussa assidue accipiunt, disperdere per respirationem non possint (*l*),

(*h*) In pulmone sanguinis calorem servari Boerh. inst. §. 200, 7, nec calefieri, nec refrigerari Bernoulli disp. p. 642; eademque est opinio Cl. Poissonerii, & Sigaud. (oeconom. animal. II, p. 59, 60.

(*i*) Bergerus de natura humana, p. 54.

(*k*) Calor ordinarius in tepidariis Russicis est $106\frac{1}{2}$ Farehneith., maximus 116 (Braun. l. c. p. 431) Cl. Richmannus tamen calorem 125 ferre potuit (ib.) quod sane mirum, quum canes ex calore 115 perierint (ib. p. 432).

(*l*) Demonstratum a Cullenio est, evaporationem, qualis per pulmonem fit, non solum aptam esse citius refrigerandis corporibus, verum etiam per ipsam ad calorem minorem, quam sit ambientis calor evaporantia corpora perduci posse.

consequens est, ut ex nimio congesto calore in vitae discrimen adducatur (*m*). Si igitur respiratio utilis semper est ad aequabilem sanguinis calorem servandum (XIX), hic maxime videtur necessaria ad praecavendum, ne calor jam maximus, & funesto proximus adaugeatur, necemque animalibus inferat. Hinc in eo calore animalia vehementius frequentiusque respirant, ut eo efficacius imminens periculum avertant (XVII).

XLIII Ex hactenus dictis jam licet definire, in quo necessitas respirationis, in quo ipsius utilitas sit collocanda (*n*). Nempe necessitas respirationis in eo ponenda est, quod in exspiratione quidem compressus pulmo sanguinem non transmittat, in diuturna autem inspiratione aër non renovatus, vaporibusque onustus, convulsionem in pulmone excitet, unde similiter transmittendo sanguini ineptus evadat (III). Neque multum ab hac necessitate utilitas respirationis videtur distare, neque alium finem natura in condendo pulmone sibi proposuisse, nisi ut irritantem molestumque vaporem, qui ad exspirationem nos cogit, expelleret, & conveniens inde sanguini refrigerium afferret (XIII, & seq.)

XLIV Et utrique quidem utilitati consuluisse videtur in construendo calidorum animalium pulmone: in his enim quum ob majorem attritum, caloremque exhalatio major requireretur & refrigerium; idcirco omnem sanguinem per pulmonem trajici voluit. In frigidis vero animalibus ob idipsum partem tantum sanguinis ad pulmonem videtur

(*m*) Ex seri coagulatione, sanguinis corruptione &c.

(*n*) „ Sed a necessitate respirationis differt ipsius utilitas: illam natura vi-
„ tasset pulmone, aut nullo facto, aut tali, qualis in foetu est. HALLER pr. lin. §. 276. Compendiosa natura unicum cordis sinum
„ effecisset, quum ad generalem circulationem nil conferat proelum
„ pulmonicum. FANTON. edit 2, p, 341. Similia BORELLUS part. II, prop. 3, p. 240, BERNOULLI disp. §. 4, p. 631.

diſtribuiſſe, quod altera reſpirationis utilitas, nempe refrigerium, in ipſis locum non haberet; altera autem, ſeu exhalatio minus urgeret, quam in calidis, neque adeo conſtans, aut copioſa requireretur.

XLV Et tamen in his ipſis animalibus exhalationi naturam proſpexiſſe conſtat, eumque imprimis uſum eorum pulmoni tribuiſſe (*o*). Et revera ranas ſub aquis ligatas interire obſervavi, & ſive ſub aquis, ſive in intercluſo corruptoque aëre reſpirare, & magno labore aquam, vel corruptum aërem haurire, & licet primum in intercluſo aëre, ipſo adhuc integro, nonniſi per intervalla ad ſuperficiem aquae aſcendant reſpirandi cauſſa, ſub finem, aëre jam foedato, magno niſu conſtanter ad aquae ſuperficiem ſe ſuſtinere, ut ibi frequenti, ac laborioſae reſpirationi incumbant, iiſdem nimirum ſymptomatibus affici, quibus calida animalia in ſimilibus adjunctis vexantur; ac tandem interire; durationem vero vitae earumdem intercluſi aëris quantitati reſpondere (*p*).

XLVI Jam vero quum in his animalibus, etiam intercepta per pulmonem via ſanguinis circulus perſeverare queat, evidens eſt talem anxietatem, & reſpirandi conatum, & laborioſam reſpirationem in intercluſo aëre, ac natam inde ſuffocationem non aliunde niſi ex ſublata reſpirationis utilitate eſſe repetendam, adeoque ſuppreſſos vapores ab aëre jam ipſis ſaturato (*q*) eos eſſe, qui pulmonem vellicent (*r*), eamque reſpirandi neceſſitatem indu-

(*o*) Opinionem Entii, qui putatitios ranae pulmones eſſe contendebat, refutat THRUSTON Diatriba p. 142, MALPIGHIUS l. c. p. 10.

(*p*) Miſcel. Taurin. II, §. 11.

(*q*) Reſpiratum aërem exitialem eſſe, quod perſpiratione pulmonali jam ſaturatus ipſam ſupprimat. FRANKLINUS (trans. philoſ. an. 1766, *V. journal encyclop.* ejus anni 15 novembris).

(*r*) Aërem a ranarum reſpiratione ſimiliter inquinari, ac a reſpiratione calidorum animalium, vel ex eo confirmatur, quod is aër flammam ſimiliter exſtinguat. Miſc. I, p. 48.

cunt (*s*), forte etiam reliquum ſanguinem inquinent, iiſdemque tandem interitum inferant.

XLVII Boerhaawius cenſuit ad eruendam utilitatem reſpirationis plurimum lucis afferre poſſe conſiderationem animalium in aëre intercluſorum (*t*), ſed in his mors non tam ſublatae reſpirationis utilitati, quam impeditae neceſſariae ſanguinis tranſmiſſioni tribuenda eſt. Quare ſperavit Cl. Hallerus ex animalibus, quibus viae foetus apertae perſtant, ejus quaeſtionis ſolutionem potius eſſe exſpectandam (*u*): ſed amphibia animalia, de quibus agimus, minorem adhuc habent reſpirandi neceſſitatem, quum ſanguis per ipſorum pulmonem tranſmitti non debeat, propterea aptiſſima ſolvendo problemati mihi videntur, & propoſitae ſententiae confirmandae.

XLVIII Et hunc quidem praecipuum pulmonis uſum eſſe, ut perſpirationi inſerviat, jam olim Galenus docuerat (*x*): ejus tamen opinionem recentiores plerique deſeruerunt, quod hujuſmodi halitum mere aqueum eſſe arbitrarentur (*y*). Verumtamen non mere aqueum eſſe oſtendunt perſpirati per cutem humoris acrimonia, & morbi ex eo

(*s*) Quum ranae etiam aperto pectore reſpirare pergant, curioſum eſſet in corrupto aëre pulmonis motum in ipſis obſervare.

(*t*) „ Interim aër praeter modo dicta aliquid reſpiranti praeſtat: nam non „ renovatus perpetuo evadit lethalis non ob calorem, vel rarefa- „ ctionem, denſitatemve, ſed ob aliam occultam cauſſam. Inſtit. §. 203.

(*u*) „ Si foramen ovale ampliter in adulto homine, ut videtur poſſe, non- „ nunquam pateret, diligens annotatio hujuſmodi fabricae poſſet „ aliquid forte lucis ad pulmonum utilitatem accendere. El. phyſ. VIII, p. II, p. 14.

(*x*) De uſu partium lib. VI, cap. 16. Ignis & animalium reſpectu hunc eſſe aëris uſum, ut exhalantes partes excipiat. Morgan. (eſſais d'Edimb. IV, p. 95). Vide conſentientes auctores apud Hallerum (el. phyſ. III, p. 355, n. *a*).

(*y*) Boerh. inſtit. §. 202, & in praelect. hic ad verbum *fuliginis* I, p. 448, & iterum in prael. ad §. 203 ad verbum *renovatus* I, p. 451, Borellus prop. 97, p. 281.

repercusso, & similitudo ejusdem cum urina, & odor, per quem canes dominum facile distinguunt (ζ); & morbi, qui ex hominibus in angustum spatium stipatis nascuntur (*a*), & respirati aëris indoles animalia suffocans, ac flammam exstingens, & foetor ipsius aëris a LAGHIO observatus (*b*). Neque exiguam esse ejus halitus pulmonalis quantitatem ex HALESII experimento constat, quo aequalis propemodum cutaneae perspirationi statuitur (*c*). Ex his eruitur in pulmone non alkalescentiam produci, ut HELMONTIUS existimaverat (*d*), sed alkalescentes putridas partes calore, & attritu in sanguine genitas per pulmones exhalare, ideo alkalescentiae indicia in eodem potiora haberi. Et animalia frigida, quibus attritus minor est, minorque perspirationis pulmonalis necessitas, aliquamdiu respiratione carere posse (XXIV), & insecta absque pulmone per trachaeas in universum corpus dispersas eamdem perspirationem, eamdemque utilitatem consequi (*e*), ac demum stirpes, absque ullo

(ζ) HALLER. el. phys. II, p. 37, 38, III, p. 3, 354 ab f ad a.
(*a*) HALLER. el. phys. l. c., & pr. lin. §. 290, 267.
(*b*) Vid. Miscel. II, p. 199.
(*c*) Vid. essais d' Edimb. II, p. 495.
(*d*) HELMONT Blas humanum §. 45, p. 180. Confer BOERH. instit. § 211, & in prael. hic ad verbum *volatile* I, p. 460
(*e*) De his PERRAULT essais III, p. 278, 279, DUVERNEY posth. p. 83, 86, LYONNET osservaz. alla teologia degl' insetti del signor LESSER I, p. 105, 106, 108, II, p. 73. Per eas trachaeas aërem recipere, & emittere ex dilatatione, & constrictione corporis alterna, qua aliquot gaudent PERRAULT (l. c. p. 278), tum ex eo quod oleo inunctae pereant, obstructis scilicet stigmatibus (ib. p. 277). Pleraque insecta aquatica frequenter ad aquae superficiem feruntur, & caudam emittunt, ut respirent; si aqua cooperiatur, fundum petunt, & pereunt (LYONNET l. c. p. 105). De modo vero, quo aërem per trachaeas exsugant, dein expellant, conjecturas proposuit FANTONUS (edit. II, p. 340). Jam vero quum vacuum multa insecta impune ferant, hirudo (BOYLE phys. pneum tit. 17, exp. 2, p. 456) papiliones (ib. tit. 19, exp. 6), vermes sponte in lacte nati, (id. physico mech. cont. II, not. X, exp. 10), insecta hexapoda, quae liliorum floribus nutriuntur (MUSSCH. in Florent. p. 48, 49), scarabaeus, impennis, tardipes (id. introd. §. 2166). Quum etiam ab intercluso aëre non laedan-

hujusmodi machinamento (*f*), per amplam foliorum superficiem hanc ipsam exhalationem emittere, quae propterea eo sensu non male cum exhalante superficie pulmonum fuerit comparata, quod vicariam his ipsis utilitatem afferat (*g*).

tur (BASIN. apud HALLER. in BOERH. IV, p. 90, not. 39 sub fin., contra oleo inuncta pereant, perspicuum est non tam defectu aëris perire, quam ex coërcito intra corpus infenso humore, qui per stigmata exhalare debuisset: nam ea exhalatio oleo coërcetur, in vacuo liberior evadit, spatium autem vacuum, aut etiam aëre plenum licet exiguum nonnisi tardissime exhalante parvorum animalculorum vapore ita repleri poterit, ut novum erupturum vaporem coërceat.

Quod si quaedam insecta in vacuo moriuntur, id tribuendum videtur caussae a LYONETO propositae, ea nempe ab interno humorum aëre exitum non inveniente, sublata externi aëris pressione suffocari l. c. I p. 105; sed ut eo revertamur, unde discessimus, chrysallides saltem aliquas non respirare, quamquam trachaeis instructae sint, LYONNETUS demonstrat (l. c. p. 102, 103) & censet stigmata in iis aperta inservire tantummodo ad excedentis humoris evaporationem (ib. p. 103); quod pro certo haberi posset, si constaret has etiam chrysallides oleo inunctas perire, quemadmodum de chrysallidibus generatim docuit REAUMURIUS (hist. des insect. I, p. 401),

Ex quibus illud erui posse videtur etiam quando insecta respirant, trachaeas eidem usui inservire, sed alternam in eisdem aëris admissionem, & expulsionem copiosiori evaporationi favere, qualis exspectari debet ab animali magis vivido, quam sit chrysallis.

(*f*) Easdem esse fistulas, quae devehant succum nutritium, & aërem (BOREL. epist. ad MALPIGH. in posth. p. 25) qualis est etiam conjectura Cl. DUHAMEL (physique des arbres I, p. 43, 173) qui censet officium, quod a MALPIGHIO trachaeis stirpium, sic dictis, tribuitur, sola analogia inniti, nec satis demonstratum esse (ib. p. 44): idemque adnotat aërem non solum per ea vasa, sed etiam per vasa stirpium propria, seu lymphatica facile transmitti (ib. p. 77), & existimat ipsum aërem stirpes subire succo nutritio admixtum, interdum per folia, copiosissime vero per radices (ib. p. 173, 177).

(*g*) GREW. DUVERNEY II, p. 89, HALES statique des veget. passim. Hinc est, ut in Papini experimento stirps pereat, si integra vacuo includatur; diutissime vivat, dummodo folia extra vacuum recipiens in liberum aërem emergant (DUHAMEL. l. c. p. 169, 170.) Hinc etiam est, ut non in vacuo solum, sed etiam in intercluso aëre stirpes pereant. (Confer BOYLE experimenta physico-mech. cont. II, MUSCH. introd. §. 2171), mucor tamen in intercluso aëre vivat, nisi vasa, quibus includitur, admodum sint angusta (com. Bonon. III, p. 42, 43).

XLIX Alia proculdubio pulmonum, & respirationis utilitas vox est, quae exspirati aëris actione absolvitur (*h*). Haud tamen videtur natura hunc finem aut solum, aut primario sibi proposuisse in pulmone efformando. Nam & pulmo qualis frigidis animalibus datus est, voci efformandae suffecisset (*i*); & animalia sunt pulmone instructa, quae tamen vocem nullam edunt (*k*), & insectorum trachaeae pulmonis vices gerentes, voci tamen non inserviunt (XXVII). Demum frigida animalia, quae unico cordis ventriculo instructa sunt, respiratione carere diutissime possent, si nullam aliam praeter vocem, & natatum a pulmone utilitatem acciperent (XXV).

L Alias secundarias, easque manifestas respirationis utilitates, suctum, olfactum, excreatum, sternutationem, oscitationem consulto omittimus, de quibus conferri merentur, quae luculentissime a Cl. Viris tradita habentur (*l*). Una tantum restat in controversia posita respirationis utilitas, aëris scilicet elastici in sanguinem ingressus, quam tanti fecerunt recentiores nonnulli, ut in hunc imprimis finem conditum esse existimarent: ex tali enim aëris cum sanguine miscela sanguinis fluiditatem (*m*), colorem (*n*) ca-

scilicet in spatio clauso, sive vacuo, sive aëre pleno foliorum perspiratio cohibetur, ubi semel illud spatium exhalante vapore fuerit refertum, nisi stirps admodum exigua sit, quemadmodum mucor, quae nonnisi tardissime interclusum spatium suis exhalationibus replere possit, uti de insectis dictum not *v* praeced. Confer Misc. II, §. 44, p. 196.

(*h*) Vocis modulationi, & olfactui Nehedam. p. 566, c. 1, Biblior.

(*i*) Vox buffonis clara, & dulcis. Perrault. (l. c. p. 135.)

(*k*) Camaleon, testudo. Perrault. (l. c.). Testudo animal absolute mutum Bomar. diction. V, p. 467.

(*l*) Confer Hallerum el. phys. III.

(*m*) Thruston. l. c. p. 62, 63, aliique permulti, quos Hallerus recenset el. phys. III, p. 331, 332 a not. d ad k.

(*n*) Lowerus, Elvetius, alii.

lorem (*o*) imo & progreſſivum (*p*), inteſtinum motum, & vitam ipſam pendere nullatenus dubitarunt, aliis ita adverſantibus, ut vel ipſius aëris elaſtici in ſanguine praeſentiam omnino inficiarentur (*q*). De qua quidem quaeſtione non prius licet differere, quam de aëre liquorum generatim nonnulla a phyſicis petita attulerimus.

CAP. III

De aëre liquidorum, in ſpecie de aëre ſanguinis.

LI Aër in liquidis pleriſque continetur (*r*), ita diviſus, ut bullarum ſpecie conſpici non poſſit. Sublato aëre externo ab ipſorum poris erumpit, bullaſque conſtituit (*s*), ejus quantitas in liquidis variis definita hoc pacto eſt (*t*): ac praeterea obſervatum liquida, e quibus hauſtus aër eſt, eumdem iterum ſorbere, principio celerius, dein tardius (*u*),

(*o*) Malpi'hi, *l. c.* p. 18. Fanton edit. II, p. 343. Duverney II, p. 478, & 507, 509.
(*p*) Mery mem. dell' Acad. 1700, p. 222, 223.
(*q*) Boerh. in prael. §. CCI, p. 443, I ad verbum *oſcillatione.*
(*r*) Boyle phyſico mech. ab exp. 20 ad 25 p. 43, & ſeq.
(*s*) Boyle l. c. Muschemb. introd. §. 2162.
(*t*) Boyle l. c. exp. 24, Boerhaawe ch. 1 p. 273, Muschemb. l. c. §. 2165. In aqua Halesius poſuit $\frac{1}{54}$ vol. (ſtatique des végétaux append). Noletius $\frac{1}{30}$ (Mém. de l'Acad. 1743 p. 215). Forte diverſitas in exp. a diverſitate caloris.
(*u*) In aquam nonniſi decem horis penetrat (Muschembroek diſp. §. 2) Quum Mariotte nonniſi 20 diebus penetrare in aquam docuiſſet, Nolletius autem 6 diebus (l. c.), concludit du Tour id conſtans non eſſe, ſed pendere a quantitate aquae, & ab amplitudine ſuperficie per quam aër ingreditur. (Mém. préſentée 11 p. 448). Confer Nolletium leçon X. exp 20, Musch introd. § 1478, Haukſbee II p. 479, Demarest ib. p. 407, Boerhaawe (ch. 1 p. 273, Mairan *de la glace* p. 191.

ac demum ipſo ſaturari, ut nullum recipere amplius poſſint (*x*). Educto aëre liquidorum volumen non minuitur (*y*), nec eodem in liquida ſubeunte horum volumen augetur (*ʒ*). Augetur autem interea dum erumpit adeo, ut liquida tunc temporis ſpecifice leviora fiant (*a*): etſi vero liquida aëre ſaturata ſint, haud minus incompreſſibilia ſunt, quam illa, quae aërem nullum continent (*b*), aër hic non ſolum ſublata externa preſſione e liquidis prodit, ſed etiam calore (*c*), aut igne electrico (*d*), aut congelatione (*e*) aut percolatione (*f*), aut ex alto delapſu (*g*).

LII Ex quibus perſpicuum eſt aërem ſola gravitate aut elaſticitate ſua liquidorum poros ſubire, donec uniformiter per ipſa fuerit diſtributum (*h*). Hinc 1° prout ſenſim in poros ſubeuns aër denſior fit ejuſdem ſubeuntis celeritas imminuitur, donec tandem denſitas, & elaſticitas recepti in poros aëris denſitati, & preſſioni ambientis aequalis evaſerit, quando liquida jam nullum amplius aërem admittunt, eoque ſaturata dicuntur. 2° Aër hujuſmodi quoniam in poros liquidorum incompreſſibilium recipitur, in-

(*x*) Auctores mox cit., BOERHAAWE praelec. ad § CCI p. 441 ad verbum *elaſtice*.
(*y*) HALES l. c exp 2 n 7 p. 337, 338.
(*ʒ*) MAIRAN l. c. p. 138, MUSCH. introd. § 2165.
(*a*) BOYLE l. c. exp. 25, MUSCH. l. c. § 2165.
(*b*) ELLER Acad. de Berlin 1750 p. 69, 70, 71.
(*c*) MAIRAN l. c. p. 185. BOERHAAWE ch. 1 p. 274 exp. 6 MUSSCH. introd. § 1455.
(*d*) P. BECCARIA el artif. § 400 let. VI, §. 188.
(*e*) MAIRAN l. c. a p 287 ad 290.
(*f*) DU-TOUR l. c p 492, 493.
(*g*) MUSCHEMB. introd. § 1477.
(*h*) Partes aëris inſtar ſpongiae aqua repleri (MUSCHEMBROEK introd II, § 1480) aërem aquae poros ſubire, uti vini ſpiritus eoſdem ſubit (MAIRAN l. c. p. 135); ſola gravitate liquorum poros ſubire (DU-TOUR l. c. p. 477); tum VENEL ex eo in primis, quod agitatione is aër excuti nequeat, quum revera aquae pori ob agitationem locum quidem mutent, ſed nec coarctari, nec deleri poſſint (Mem. preſentées II, p. 88).

compreſſibilis eſſe debet: nam comprimi nequit, quin pori, quibus continetur, coarctentur, atque adeo quin liquidum ipſum comprimatur. 3° Et ſimiliter liquidorum volumen ipſis adjectum augere nequit, quum in interſtitia partium tantummodo recipiatur. 4° Quoniam vero in liquidorum poros aër hic nonniſi lente penetrat, neceſſe eſt reſiſtentiam pati ab anguſtia pororum, quos ſubit. 5° Eamdem reſiſtentiam, quam patitur aër exterior, ut poros pervadat, pati debet aër poris incluſus, quando ab iiſdem erumpere nititur. 6° Hinc dum praevalente vi ſua erumpit, anguſtia pororum impeditus, liquida expandet in majus volumen, undas, & bullas in iiſdem excitabit. 7° Id vero fit quotieſcumque elaſticitas aëris in poris contenti major fiet preſſione ambientis. 8° Fiet autem major, ſi aut translatione rariorem aërem, vel anthlia ambientis preſſio imminuatur, aut interni aëris elaſticitas vel per calorem, vel per ignem electricum adaugeatur; aut demum ſi congelatione conſtrictis liquorum poris aër condenſetur (*i*). Contra (IX) aër in liquidorum poros irruet, ſi ejus preſſio elaſticitatem incluſi aëris ſuperet, quod fiet translatione in denſiorem aërem, ambientis condenſatione, liquorum refrigeratione, eorumdem congelatorum ſolutione.

(*i*) Aërem in aquae poris contentum per congelationem elaſticitatem recuperare contendit Halesius (l. ql. c. exp. 2, n. 7) & Demarest (in notis ad Hauksbeium II, p. 400, 401): elaſticum jam fuiſſe; ſiquidem frigus aëris volumen, & elaſticitatem non auget, ſed minuit: (Muschembroek introd. § 1477) perinde expelli, ut vini ſpiritus, & ſalia aqua ſoluta ab eadem congelaſcente extruduntur, Mairan (l. c. a p. 287 ad 290).

Quum vis refractiva glaciei vi aquae refractiva paullo minor ſit (De la Hire mém. de l'Acad. 1693, p. 252, Mairan l. c. p. 299, 300); atque adeo denſitas minor; mirum eſt aërem, cujus volumen ex glaciali frigore contrahi debuit, ejus tamen poris contineri amplius non poſſe, imo ab iiſdem expelli, niſi aut mutatam figuram pororum, aut extraneum corpus aërem pellens incuſemus, quae tamen hactenus nullis certis argumentis demonſtrata ſunt.

LIII. Ex his facile refelluntur, quae adversus elasticitatem aëris in liquidis contenti afferuntur. Ajunt enim aërem liquidis contentum elasticum non esse. 1° Quod comprimi non possit (*k*). 2° Quod ipsius volumen majus sit volumine liquorum, a quibus recipitur (*l*). 3° Quod e liquoribus erumpens ipsorum volumen augeat (*m*). 4° Quod non statim e liquidis prodire incipiat, ac aër ambiens rarefieri incipit, sed ingens rarefactio praecedere debeat, priusquam erumpat (*n*). Ex his nempe omnibus concludunt aërem in liquidis in minima elementa ita divisum esse, ut elasticitatem non exerceat (*o*), aut eadem prorsus destituatur (*p*). Recuperare vero elasticitatem, quotiescumque aut ambientis rarefactione, aut calore, aut igne electrico, aut congelatione in majores bullas fuerit collectus.

LIV. Harum, inquam, similiumque objectionum solutio ex praecedentibus perspicua est. Nam 1° aër quantumvis compressibilis, liquidis, quorum poris continetur, compressibilitatem nequit impertiri (II). Falsum vero est volumen aëris in liquidis contenti horum volumine majus esse, si ad ambientis aëris densitatem redigatur (*q*). Etsi enim MARIOTTE ex aqua aëris volumen se eduxisse tradat ipsius volumine 8, aut 10 vicibus majus; erroris tamen fontem HALESIUS invenit, qui ex oleo aquae cir-

(*k*) Auctores cit. ad not. *k*.
(*l*) BOERHAAWE ch. I, p. 279, 280, exp. 10, MAIRAN l. c. p. 137, ex MARIOTTE omnes.
(*m*) ELLER l. c.
(*n*) BOERHAAWE l. c. p. 277 coroll. VI subsidente jam mercurio in barometro ad 25 pol. ex aqua nondum prodire. Non prodire nisi externo aëre ad dimidium rarefacto (id. prael. § CCI ad verbum *elasticae*) subsidente mercurio ad tres, vel quatuor pol. MUSCHEMBROEK (introd. § 1477).
(*o*) BOERHAAWE prael. l. c.
(*p*) Id. l. c. & ch. I, p. 280, 281.
(*q*) Vid. supra not. *d*.

cumpofito in eo experimento magna ex parte aërem illum prodiisse adnotavit (*r*). Cur vero liquorum volumen erumpendo adaugeat, superius indicavimus (II), quia nempe dum propria elasticitate dilatatur, pororum angustia impeditur, quominus ea velocitate effugiat, qua nititur expandi (*s*). Ex quo intelligitur cur bullarum specie aër non erumpat, nisi postquam ambiens admodum fuerit rarefactum: nam si elasticitas interni aëris externi pressionem parum superet, per pororum meatus erumpens paullatim aër aequilibrium quiete restituet (*t*), tum vero, ut dicebam, ipsius eruptio tumultuaria demum, & violenta erit, & bullas, undasque excitabit, quum excessus elasticitatis interni aëris supra pressionem externi tantus erit, ut per angustias pororum ea velocitate erumpere nequeat, quam elasticitatis differentia postularet.

LV Aër igitur in liquidorum poris divisus utique in minimas partes est, sed ita, ut elasticitatem exerceat: nam phaenomena ejus aëris proprietatibus elastici fluidi apprime consentanea esse ostendimus (II). Nec obstat, quod observant, in liquorum poris hunc aërem quiescere: non enim quiescit ex eo, quod elasticitate careat, sed quia nisus ejus elasticus ab aequali ambientis pressione co-

(*r*) L. ult. c. exp. 2, n. VI, p. 335, 336. MARIOTTE experimentum a BOERHAAWIO narratur ch. I, p. 279, exp. 10.

(*s*) Viscidiiate liquorum impeditur, MUSCHEMB. introd. § 2162.

(*t*) Revera, quando vas aquam continens, & obturatum repente in vacuo aperitur, longe copiosiores bullae erumpunt, quam quum aqua in aperto vase intra excipulum pneumaticum constituta, paullatim vacuum paratur; praesertim si excipulum amplum sit, ut non nisi tardius exhauriri possit. BOYLE exp. physico-mech. exp. 28, p. 64, 65.

Quod si igitur tardissime aër educatur, interposita mora inter singulas exanthlationes, verosimile est aërem e liquoribus latenter & absque bullis posse exhauriri; quemadmodum latenter & absque bullis in eos irrepsit. Hinc vero concludi potest etiam ex translatis liquoribus in rariorem aërem, tum ex aucto per tempestatem calore aërem ab ipsis clam prodire, licet ex defectu bullarum contrarium statuat MUSCHEMBROEKIUS introd. § 1477.

hibetur. Nec etiam admitti poteſt, quod addunt, calore, igne electrico, congelatione, partes, quae prius elaſticae non erant, elaſticitatem recuperare, quamdiu haec tanta non ſunt, ut elementa ipſa liquorum tranſmutare poſſint. Etſi vero ab harum cauſſarum vehementia fixae corporum partes in aërem elaſticum converti queant; nihil tamen ſimile ab ambientis aëris exanthlatione licet exſpectare, quae nihil aliud praeſtat niſi, ut aëri e poris liquorum erupturo reſiſtentiam tollat, qui certe, ea tantum ſublata, elaſticorum corporum more non expanderetur, bullaſque efformaret, ſi illic elaſticitate orbatus deliteſceret.

LVI Enimvero phaenomena aëris fixi corporum a phaenomenis aëris elaſtici hactenus expoſitis longiſſime abſunt. Ut enim 1° aër elaſticus, nulla inducta in partes liquorum elementares mutatione, elici poteſt, & iterum admitti (I, II): contra aër fixus excuti nequit, niſi per putredinem, fermentationem (*u*), efferveſcentiam (*x*), vehementioris ignis vim (*y*) corporum compages deſtruatur, & elementa ipſorum pervertantur: nec propterea: 2° aër hoc pacto expulſus corpora a quibus educitur, ſponte ſua, iterum ſubit, unde aëram metamorphoſim elementorum corporis in aërem elaſticum fieri concluſerunt (*z*). 3° Aër hic pluries ſuperat volumen corporum, a quibus educitur (*a*). Hinc nullatenus elaſtica forma in ipſis praeexſtitiſſe

(*u*) Boyle exp. phyſico-mech. cont. II, paſſim.

(*x*) Statique des veget. cap. VI ab exp. 83 ad 104.

(*y*) Ib. ab exp. 49 ad 79.

(*z*) Aërem anthlia e liquorum poris eductum elaſticum fuiſſe, & ad eorum compoſitionem non pertinere, ſecus ac illum, qui fixus eſt, nec niſi chymicis artificiis educitur (Dict. de chym. I, p. 59). Similia Macbride (eſſais p. 359 in not.) & Halesius, qui hoc addit ad utriuſque aëris diſcrimen oſtendendum aërem artefactum citius tardiuſve elaſticitatem amittere (l. c. append. exp. 2, n. VIII); jacturam vero ponderis, quam tartarus, aliaque corpora per diſtillationem patiuntur tribuit converſioni eorumdem in aërem elaſticum (l. c. p. 241).

(*a*) Boyle, Hales, Macbride l. c.

censendus est: nam densitatem, & propterea elasticitatem tantam habuisset, ut eidem coërcendae nec ambientis pressio, nec corporum firmitas paria esse possent (b). 4° Aër ille artificialis plerumque venenatus, flammaeque, & animalibus infensus est, unde aliqui verum aërem esse pernegarunt (c), qui tamen aërem liquorum poris contineri concedunt (d), forte quod ejus naturam a communis aëris indole haud similiter abludentem observaverint: quae omnia tantam inter priorem illum liquidorum aërem, & hunc arte factum ponunt differentiam, ut vel ipse Halesius, qui tantam in aëre fixo corporum explorando, ac illustrando diligentiam adhibuit, aërem vere elasticum liquorum, & inprimis aquae poris contineri affirmet, & diffidentium argumenta refellat (e).

LVII Ut vero de ceteris liquoribus diximus, de sanguine etiam dicendum, ipsum aërem continere, qui sublato externo aëre bullarum specie erumpat (f), & a sanguine ultra saturationem recipi non possit (g). Hic etiam aër dum erumpit sanguinis volumen adauget (h), adeo ut arteria, & vena, quae aqua graviores ipsius fundum petunt, facto vacuo, jam tumidiores, levioresque innatent (i). Neque quod aërem contineat sanguis ideo compressibilis evadit (k).

(b) Hales l. c. exp. 25, p. 189.
(c) Muschemb. in Florent. p. 37, 38.
(d) Id. essai de physiq. § 884, 885.
(e) L. c. exp. 2, n. VI, VII a p. 335 ad 338.
(f) Muschemb. disp. p. 575 introd. § 2165, Bergerus de nat. hum. p. 43, Boyleus, des aguliers, cours. de phys. II, p. 457.
(g) Boerhaave praelec. ad § CCI ad verbum *absorti*.
(h) Coagulum cruorosum in vacuo intumescit. Muschembroek. disp. p. 575.
(i) Muschembroek. disp. § 14 introduc. § 2165. auagius effets de l'air § 72, Morgagni de sedibus, & caussis morb. V, p. 18, p. 41. Viscera, quae aquae fundum petunt in vacuo intumescunt, & innatant. Muschemb. disp. § 5.
(k) Savagius l. c. § 71, & el. phys. § 138.

Demum coagulatione aër ad concrescentis sanguinis superficiem bullarum hexagonarum specie expellitur (*l*).

LVIII. De hoc aëre quaestio etiam fit, utrum elasticus, & communi similis, an fixus, & elasticitate destitutus censeri debeat. Illud ex hactenus dictis constare satis videtur aërem in poris sanguinis contentum ab illo, qui in ceterorum liquorum poris continetur nequaquam discrepare (*m*). Hinc est, ut qui aërem ceterorum liquorum inelasticum dicunt, hanc quoque sanguinis elasticitatem denegent (*n*): vicissim, qui nobiscum liquorum aërem elasticum esse opinantur, elasticum quoque aërem in sanguine nobiscum admittant (*o*). Nec propterea necessarium puto diutius immorari in expendendis difficultatibus, quae adversus elasticitatem aëris in sanguine contenti afferri solent iis prorsus similes, quas § III, IV expendimus; quod nempe, quum sanguis incompressilis sit, ejus aër elasticitate carere debeat, quod quum nonnisi, sublato externo aëre, expandatur, prius inelasticus esse debuerit, quod demum inelasticus sit, quum sanguis frigore parum adeo constringatur. Enim vero aër in poris sanguinis contentus nec ipsum compressibilem, nec fri-

(*l*) Idem el. phys. § 150, Littrius mém. de l'Acad. 1714, p. 331.

(*m*) Idem affirmant Boerhaave (inst. § 210), Hallerus (el. phys. III, p. 337, 339), Savagius (el. phys. § 133, 137, 138), Muschembroekius (introd. § 1481).

(*n*) Boerhaave ch. I, p. 281, alii, quos memorat Bergerus, qui aëris quamdam tenuiorem, *mediae naturae, non elasticam, quam ipsi satis exponere non queunt* portionem sanguini commisceri contendunt. De natur. hum. p. 40.

(*o*) Vulgarem aërem in sanguine contineri Sauagius el. phys. § 133, 137, & Muschembroekius, qui ait: „ Aër, qui cum chylo transit in „ sanguinem, ejusdem est naturae, ac aër, qui inspiratur, . . nam elasticum gravem se probat in ductu thoracico (disp. p. 581). Elasticum quoque aërem sanguinis faciunt Ferrein (disp. p. 559), Duverney (posth. II, p. 83, 84), Macbride, qui contrariam Boerhaavii opinionem impugnat (l. c. a p. 66 ad 102), Bergerus (l. c. p. 43), Fantonus (differt. anat. p. 143), Halesius, qui ab aëre elastico fluida animalium promoveri contendit (l. c. p. 266), & ex primis Borellus (prop. CXII, CXIII).

gore magis denſabilem efficere debet, nec ſuas proprietates ullo modo ſanguini poteſt impertiri. Similiterque aër ſanguinis preſſione atmoſphaerae cohibitus non prius ſe expandet, quam ea preſſio fuerit ſublata. Confer. ſupra §. III.

LIX Illud utique ex ſanguinis incompreſſibilitate erui poteſt, aërem per ejus poros diſperſum (*p*) neutiquam vero in bullas diſtinctum (*q*). Nam hujuſmodi bullae extra poros ſanguinis poſitae id utique efficerent, utpote compreſſibiles, ut commune ex ipſis, & ex ſanguine conflatum volumen minui poſſet, unde ſanguis compreſſibilis videretur. Quod ſi aëreae bullae in ſanguine non adſunt, inde poteſt intelligi, cur aër in ſanguine contentus non noceat, licet bullae aëreae in ſanguine genitae (*r*), aut in vaſa inje-

(*p*) „ Aërem elaſticum in intimis interſtitiis humorum omnium cum ſan- „ guine circulantium contineri, & quidem ipſum ita diviſum, ut „ non facile aliquot partes invicem collectas poſſideat (MUSCHEMB. „ diſp. p. 592), diſſolutum in aqua, & in ea tamquam ſal aliquis „ colliqueſcentem (HALLER l. c. p. 366, 367). Similia SAUAGIUS (el. phyſ. § 144), MORGAGNI (l. c. V. § 18, p. 41), BORELLUS (prop. CXIII), FANTONUS (l. c. p. 345). Amplam pulmonibus ſuperficiem datam eſſe, ut aër per minimas partes ſanguini facilius admiſceretur (DUVEENEY l. c. II, p. 87, 506).

(*q*) Quales bullas admittit MERYUS (Mém. de l'Acad. 1707).

(*r*) „ Si vero contingat aliquot partes aëris in ſanguine combinari, morbi „ periculoſi, & mors oborientur (MUSCHEMB. diſp. 593). Aër ipſe „ ſolutus, ac liber inter ſanguinis partes interjectus harum motui ſe „ opponit (MORGAGNI l. ul. c.). Motibus liquidorum obſtat, ut vide- „ mus liquores in vaſa ſyphone injectos, intercepto aëre, validum „ obiicem, ac fere inſuperabilem invenire (FANTON l. c.): videtur „ aër cor diſtendendo eius motum impedire, ſicque mortem inferre (MORGAGNI l. c. V. § 23).

Aëris vero bullae in cadaveribus obſervatae vel cum manifeſta putredine (MORGAGNI V. § 29, 30, XXXI, § 23), vel abſque ulla alicuius momenti adjuncta putredine (HALLER in BOERH. n. *i* ad § CCI). Poſt haemorragias (LITTRE Mém. de l'Acad. 1771 p. 331, FERREIN diſp. p. 549). Poſt vulnera (HALLER pr lin. § 280, & ul.). Poſt repentinam mortem cor aëre plenum (RUYSCHIUS epiſt. probl. XVI p. 9). Ex atrophia venae aëris plenae (LIEUTAUD précis. p. 401). Confer MORGAGNI l. c. V. § 17, 19, 20, 24, 25.

injectae (*s*), quaeque poris ſanguinis aëre jam ſaturati excipi amplius non poſſunt, utique laedant.

LX. An vero aër ſanguinis per pulmonem advenit? an is eſt primarius reſpirationis finis (*t*)? Quantitas aëris, quae ad ſanguinis ſaturationem requiritur, cum chylo videtur advenire: nam chylus ex alimentis, & potulentis fit aëre refertis (*u*). Hinc aërem elaſticum in vacuo emittit, eademque phaenomena praebet, quae a ſanguine exhiberi obſervavimus (*x*). Quare quum ſanguis aëre ſemel ſaturatus nullum (*y*) recipere amplius poſſit (IX), perſpicuum eſt, aërem nullum per pulmonem in ſanguinem advenire, niſi cauſſa aliqua occurrat, quae aequilibrium inter externum aërem, & aërem in ſanguine contentum valeat perturbare. Rem confirmant aquatica animalia (*z*), & foetus ipſi in amnio contenti (*a*), qui humores aëre elaſtico haud mi-

(*s*) De effectibus aëris in venas animalis injecti confer Helvetium (Mém. de l'Acad. 1718 p. 232), Morgagnum, qui ab immiſſo aëre ſanguinem negat coagulari, & animalia alia prae aliis ab eodem laedi affirmat (l. c. V. § 21, 22), Bergerum, qui pedetentim immiſſum aërem (l. c. p. 40); tum Pringlium, qui pauca copia funeſtum non eſſe obſervat, licet pulſum intermittentem reddat (maladies des armées II p. 295).

(*t*) Ut ſentit Borellus (l. c. prop. CXIII), Lowerus (de cord. p. 158), Fantonus (l. c. p. 342, 343), Ruyschius (epiſt. probl. XVI), Duverney (l. c. p. 83, 84), Ferrein (diſp. p. 559).

(*u*) Ita Muschebroek (diſp. 580), Nehedam (l. c. p. 562), Macbride (l. c. p. 103), Senac (du coeur II p. 121). Non diſſentit Meryus aërem, qui ad ſanguinis ſaturationem requiritur, cum chylo advenire (Mém. de l'Acad. 1707 p. 157, 158, 165). Sauagius (effets de l'air § 76).

(*x*) In chylo perinde ac in venis, & ſanguine demonſtrari Morgagni (l. c. V. § 21), Musch. (diſp. p. 173), ex ductu thoracico, ſcilicet duobus vinculis intercepto, & in vacuo tumente.

(*y*) Ita Boerhaave (prael. § CCI ad verbum *abſorti*), Hallerus (el. phyſ. III p. 337), & ipſe Meryus (Mém. de l'Acad. l. ul. c.).

(*z*) Florentini (p. 54, 55 col. Acad.), Hauksbee (exp. phyſico mech. II p. 429), Boyle (experimenta phyſico-pneum. tit. VII), Duverney (II p. 503, 504).

(*a*) Musch. diſp. p. 570.

nus imbutos habent, licet illa pulmonibus careant, hi vero nullam respirationem exerceant.

LXI Quod si aequilibrium inter externum internumque aërem pervertatur, tunc equidem videtur per pulmonem commodissime posse reparari (*b*). Nam aër vapori pulmonali admixtus eam viam facile penetrat (*c*), & per eumdem majores etiam aëris bullae interdum immittuntur (*d*), & hanc ipsam viam effluvia odorifera, & venena saepissime legunt (*e*), & demum per amplissimam super-

(*b*) Vel ipse MUSCHEMBROEKIUS admittit (introd. § 2168), licet in primis scriptis copiose probare conatus esset, viam aëri in sanguinem per pulmonem denegatam esse (disp. cap. III toto).

(*c*) „ Aërem in sanguinem venire; nemo, puto, negat, sed dissolutum in aqua & l. c. (HALLER el. phys. III p. 336, 337). Sunt qui negant injectum in trachaeam aërem subire venam pulmonalem, *at si aërem in tenuia intestina intrudant, nil quoque lactea vasa subire notabunt, interea chylus copiose eadem subintrat, quem aëre prorsus destitui nemo affirmaverit*, FANTON l. c. p. 242, 243. Ita plerique auctores cit. superius ad not. *y*.

(*d*) Etsi experimentum non successit HARVEO (in proem. ad exerc. I de mot. cord. p. 21): nec NEHEDAMIO (l. c. p. 565): nec BOHNIO (circ. anat. p. 69): nec BULFINGERO (com. act. Petr. III p. 240): nec HALESIO (haemastat. exp. XI n. VI): nec MUSCHEMBROEKIO (disp. p. 610): nec DUVERNEYO (l. c. II p. 82, 83), qui absque adhibita vi id fieri non posse suspicantur. Successit tamen SWAMERDAMIO (de resp. sect. 3 cap. 2, § 4) testibus experimenti SYLVIO (disp. VII, § 86), STENONIO (epist. ad BARTHOL. IV ep. 55), BORRICHIO, qui nil unquam diruptum apparuisse affirmat (l. c. ep. 76). Successit etiam MERYO (Mém. de l'Acad. 1707 p. 164), FERREINIO (disp. p. 549), LIEUTAUDIO (el. physic. p. 89), & HALLERO, qui aërem *leni vi, sed continuata* transmitti ex proprio experimento docet (in BOERH. n. 1 ad § CCI), & MORGAGNO, *qui, inflato pulmone, repetitis praesertim, & diutius in eam productis, nec tamen violentis inspirationibus pulmonalis venae truncum vidit spumoso humore compleri* (l. c. V. § 22); ex quibus erui posse videtur, etsi aëris bullae secundum naturam in sanguinem per pulmones non adveniant, quum nullae revera in eodem insint (IX); patulas tamen vias esse, per quas non difficile possint impelli.

(*e*) Odor spiritus therebinthinae, qui observante HOMBERGIO urinas inficit apud MERY (Mém. de l'Acad. 1707 p. 166, 167), & miasmata contagiola in sanguinem transmissa (BERNOULLI disp. p. 614), SAUAGIUS (l. c. § 140), DUVERNEY (l. c. p. 87), LIEUTAUD (el. phys. p. 90).

ficiem in pulmone nudus fere sanguis aërem contingit (*f*). Idque eo magis verosimile, quod cutis, quae altera via visa est emittendo, admittendoque aëri apta (*g*), longe tamen durior pulmone, densiorque sit, & minoribus exhalantibus vasis instructa; hinc animalia in vacuo inflata perstant, nec detumescunt (observante Meryo) nisi aërem per os emittant (*h*).

LXII. Si itaque aër externus interno rarior fiat, internus vi sua elastica se expandens animalia inflabit, eademque symptomata inferet, quae ab immisso in venas aëre producuntur (IX); quae tamen omnia aëre ipso mox per pulmones prodeunte, & ad aequilibrium se componente evanescent (*i*). Imo vero si illa externi aëris rarescentia paullatim oboriatur, ut sensim aër per pulmones erumpere possit (IV), sensim etiam aequilibrium reparabitur, quin ulla animalium inflatio, ullumve incommodum nascatur (*k*). Contra si aër externus densior fiat, pressione sua in pulmonalem sanguinem penetrabit donec per omnes corporis humores aequabilem densitatem fuerit adeptus.

LXIII. Parum dissimili ratione contingit, ut si vacuum aliquod in humano corpore nascatur, in illud aër per exhalantia vasa se diffundat, quo spectat aër in luxati artus cavum collectus, & ejus reductioni resistens (*l*), aut

(*f*) Haller prael. lin. § 278. Se non videre *quid obstet aëri, quominus venas adeo magnas subeat*, id in Boerh. not. *l* ad § CCI.

(*g*) Poros cutaneos aërem admittere, & emittere, quum pulmones ei muneri non sufficiant, Ruyschius epist. prob. XVI p. 9. In omnes corporis cavitates viam aëri per cutem patere, Keil. (tent. p. 193), Bouillet hist. de l'Acad. 1743 p. 80.

(*h*) Mém. de l'Acad. 1797 p. 221.

(*i*) Misc. Taur. II, p. 176 § 13.

(*k*) Incommoda in Academicis altissimos Peruvianos montes conscendentibus ex labore itineris: nam quando equo vecti conscendebant, eadem vitabant, observante Sauagio (effets de l'air 68).

(*l*) Haller el. phys. III, p. 329, not. *u*, *x*, *x**, *y*.

viciſſim ſi in cava corporis effuſus aër comprimatur, & addenſetur, per reſorbentia vaſa paullatim penetret, & in humorum maſſam ſe diffundat. Atque huc referri poteſt aër per pectoris vulnera, aut paracentesim admiſſus, & per occluſionem pectoris relictus, qui licet principio dyſpnoeam inferat, cito tamen incommodus eſſe deſinit (*m*), huc quoque emphyſematum reſolutio ſpectare videtur (*n*), quae phaenomena aëris reſorptioni potius, quum deſtructo ipſius elateri adſcribenda eſſe vel ex eo conſtat, quod HALESIUS obſervaverit aërem numquam ex toto elaſticitatem amittere (*o*).

LXIV. An vero praeterea admittenda eſt circulatio quaedam aëris, & renovatio, ut in pulmone receptus aër per cutem exhalet (*p*), aut abſoluto circulo per pulmonem ipſum iterum expellatur (*q*)? An inde deducenda diverſitas coloris arterioſum inter ſanguinem, & venoſum? Equidem omnes humores excrementitii aëre ad ſaturationem referti ſunt (*r*), ſed ſanguinis maſſa reparatur a novo chylo, novo aëre ſaturato (X); nec propterea

(*m*) HALES l. c. p. 213, 214, HALLER l. c. p. 240 241.

(*n*) „ In emphyſemate ſiquidem flatus diſpellitur, neceſſe eſt, ut vel cutem „ inveniat perviam, quam dicunt aëri non eſſe permeabilem, vel „ reſorbeatur in canales noſtros (HALLER n. *m* ad § CCI BOERHAAV.).

(*o*) Statique des végét. p. 263, 264, 265. Vid. Miſcel. II, p. 185, § 25.

(*p*) Quae vetus ſententia MERY eſt. Hiſt. Acad. reg. l. 4, ſect. 2, cap. 3, n. 12, 13, non repugnate SAUAGIO l. c. § 135.

(*q*) Quae nova ſententia MERY Mém. de l' Acad 1700, 1707.

(*r*) Per omnia organa exteriora aërem prodire, & etiam humores per cutem erumpentes, implicitas habere aëris particulas, indeque eſſe, ut animalibus in intercluſo aëre mortuis, mercurii altitudo in barometro iterum augeatur. FANTONUS l. c. 344, 345. Aërem ſuperfluum per vias urinae, & perſpirationis ejici. MACBRIDE l. c. p. 104.

ulla necessitas aëris per pulmonem admittendi (*s*) ut jactura reparetur, quae per excretiones contingit. Quod vero spectat ad colorem sanguinis arteriosi, venosique, si discrimen satis certum, & constans est, non inverosimile videtur ab evaporatione sanguinis, quae in pulmone fit, esse deducendum. Etsi enim alibi experimenta protuli suadentia colorem sanguinis ab aëre mutari (*t*), etsi eorum veritatem deinceps constanti successu comprobatam vidi; quum tamen animadverterem conditiones, propter quas aër admittitur, aut arcetur, evaporationi etiam aut favere, non obstare, in eam opinionem deductus sum, ut aut tam praesentiae aut contactui aëris, quam evaporationi eos effectus tribuendos suspicarer; quae tamen hypothesis non prius potest admitti, quam experimentis explorata fuerit, ac comprobata.

LXV. Aër vero sanguini admixtus quid boni praestat? An ad sanguinis fluiditatem servandam conducit (*u*)? An inde fit, ut cum aëre quassatus sanguis numquam concrescat (*x*)? Verumtamen fluiditas sanguinis per agitationem producta a sero est, quod nunquam concrescit, rubris glo-

(*s*) Hoc ipsum ratiocinium proponit ipse MERYUS, quando quaestio tantum fit de aëre, qui ad sanguinis saturationem requiritur (Mém. de l'Ac. 1707, p. 157, 158, 165): nam eius hypothesis de circulatione aëris versatur circa aërem adunatum, *aër en masse*, quem sanguini ultra saturationem inesse, & in pulmone renovare censet (ib. p. 162, 164, 165).

(*t*) Misc. Taur. I, p. 68, & seq.

(*u*) THRUSTON (l. c. p. 62, 63). Quatenus sanguini suppeditat tenuius elementum. MALPIGHI (l. c. p. 18). Eamdem sententiam sequuntur plures alii, quos memorat Cl. HALLERUS (el. physic. III, p. 331, 332); negat tamen BORELLUS (prop. CXIV).

(*x*) Sanguis quassatus nec coire amplius potest, nec insulam facere (DE HAEN nosoc. pract. part. IV, cap. VI, § 3). Similia MUSCHEMBROEKIUS (disp. p. 554). AURIVILLIUS (disp. 275, not. *m*). DAOUSTENE (disp. p. 547). *Sanguis emissus vasis suis in liberrimo aëre, etiam conquassatus cum aëre elastico, protinus* observatur coagulari BOERHAAVE (prael. § CCI ad verbum *oscillatione*).

bulis infecto, quum pars gelatinosa, quae alias rubros globulos secum in placentam abripit, agitatione in serum dimittat, & sola concrescens membranam Ruyschianam dictam efformet (*y*). Quamvis igitur serum cruore tinctum falsam cruoris non concrescentis speciem referat, certum tamen est agitatum cum aëre sanguinem coagulari. Vicissim sanguis animalium in vacuo exstinctorum aëre licet spoliatus, fluidus reperitur (*z*). Demum in calore animalis servatus sanguis, quamvis quiescat, diutissime fluidus perstat (*a*), ex quo conficitur fluiditatem sanguinis non ab agitatione, nec ab admixto aëre, sed a calore esse repetendam?

LXVI. Aër etiam sanguini admixtus parum nihilve ad sanguinis oscillationem, motumque intestinum videtur conferre (*b*), saltem quamdiu cum externo aëre aequilibratus in ejusdem meatibus quiescit. Enim vero superius constitit in poris liquorum incompressibilium contentum aërem comprimi non posse, cum amplitudo aut figura pororum nequeat mutari (II, IV). Aër vero non compressus nec etiam resiliet, nullumque propterea motum sanguinis partibus imprimere poterit.

LXVII. Quam nam igitur demum utilitatem aër sanguinis affert? Praecipuam eam esse censeo, ut aequilibrium cum externo aëre constituat, sicque impediat quominus vasa ab ejus pressione elidantur (*c*). Praeterea rori exha-

(*y*) Cl. Gaber. Miscel. Taur. III, § 13, 14.

(*z*) Borelli prop. CXX.

(*a*) Schwenche hematol. p. 90. Senac du coeur II, p. 124. In calore humani corporis sanguis per dimidiam horam nullam mutationem subibat. Eller Acad. de Berlin 1751 col. Cl. Paul. II, p. 390.

(*b*) Uti censet Malpighius (l. c. p. 18). Duverney II, p. 478, & 507, 509, & alii multi.

(*c*) Similiter Bergerus (l. c. p. 41). Sauagius (l. c. § 74). Muschem. (introd. § 2170). Senac (l. c. II, p. 118). Macbride (l. c. p. 95, & seq.). „ Et sane nisi res sic se haberet, huius, in quo nostra sunt „ corpora, aëris circumundique prementis vis urgendo vasa motum „ sanguinis sufflaminaret. Morgagni l. c. V, § 18.

lanti admiſtus videtur efficere, ut viſcera ac membranae ſupra ſe invicem moveri poſſint perinde ac ſi, ulla externa preſſione opprimerentur (*d*); atque huc incommoda refero, quae ab aucta ſubito externi aëris preſſione naſcuntur, non prius ceſſatura, quam aër humorum uniformem denſitatem acquiſiverit (*e*), unde animal non ſolum aptus fit atmoſphaerae ponderi ferendo, ſed ejus etiam decuplum facile ſuſtinet (*f*). Inde etiam intelligitur cur animalia in rariorem aërem repente translata, inflentur, convellanturque; quae tamen ſymptomata aut nulla ſint, ſi ea mutatio paullatim fiat, aut etiam paullo poſt ſedentur, quum aër humorum aeque rarus evaſerit (XII).

LXVIII Aër itaque humorum animalium quamdiu ejuſdem cum externo denſitatis eſt, cum eodem in aequilibrio eſt, ut humores per ſua vaſa aeque libere moveantur, ac moverentur in vacuo ſpatio; ſimiliterque membranae, & viſcera ſupra ſe invicem facile gliſcunt: at ſi minoris extus denſitatis repente evadit vaſa intumeſcunt, membranae ſecedunt, & divelluntur, ſi majoris exprimuntur vaſa, interiores partes ad ſe mutuo apprimuntur.

LXIX Ex quibus experimentum Halesii explicatur, qui nempe deprehendit animalis in vacuo enecti pulmones, qui albi reperiri ſoleant, rubros adparere, ſi animalis ipſius thorax variis inciſionibus apertum fuerit priuſquam vacuo committeretur; tum experimentum alterum, in quo felis tranverſim ſub diaphragmate ſectae diaphragma

(*d*) Partes maxime flexiles, ut abdomen, ventriculus reſiſtunt ponderi atmoſphaerae ob incluſum aërem (Sauagius l. c. § 41). Sine aëre interno elaſtico cava corporis eliderentur (Senac l. ul. c. Keil l. c. p. 192).

(*e*) Qualia incommoda graviſſima ex nimis celeri campanae urinatoriae deſcenſu oriuntur. Desaguliers cours de phyſique II, p. 459. Sauagius l. c. a § 43 ad 46, Musch. introd. § 2170.

(*f*) Desaguliers l. c.

in vacuo deprimi obſervavit (*g*). Patet nimirum aërem rore thoracico contentum in vacuo ſe expandere debere pulmonem inter, & diaphragma, eademque ab invicem divellere, non ſecus ac ſcleroticae laminae ab aëre humoribus contento in vacuo divelluntur (*h*), aut marmorea plana ſibi adhaerentia in vacuo ſeparantur ab elatere aëris oleo inhaerentis, quo inunguntur (*i*). Itaque expandens ſe aër pulmones ita comprimet, ſanguinemque ita ab iiſdem exprimet, ut, mortuo animali, exſangues, albique appareant; quod non continget, ſi aperto prius pectore aër ille libere exhauriri poſſit. Eadem vero cauſſa, quae pulmones comprimit, diaphragma etiam in oppoſitam partem detrudit.

LXX. Enimvero haud veroſimile videtur, diaphragma depelli ab aëre in pulmone reſtitante, ac ſe expandente, quum aër ille libere per glottidem prodire poſſit, hinc pulmo in vacuo non intumeſcat, aut diſtrahatur, ſed contra denſior fiat (*k*), unde potius locum cedere diaphragmati deberet, ut altius in pectus aſſurgeret. Quemadmodum igitur in ſanguine ſecundum naturam nullae inſunt aëris bullae (IX), ita nec in cavo pectoris (*l*), & quemadmodum ex ſanguine bullae erumpunt, ſi in vacuo ſpatio conſtituatur (VII); ſic etiam videntur ex vapore perſpirante pectoris poſſe prodire, & memorata phaeno-mena

(*g*) Haemast. exp. XII, n. 10.
(*h*) Muschembroek diſput. p. 587.
(*i*) Boyle experim. phyſico mech. cont. I, exp. 50; I, p. 303; Purchotius inſtit. Philoſ. II, p. 329.
(*k*) Ut aquae fundum petat, modo animalia in vacuo lente enecentur, aut aliquamdiu poſt mortem in vacuo relinquantur (Verati com. Bon. T. II, P. I, p. 338, 339); & aër paullatim admittatur (Muschembroek introd. § 2167.
(*l*) Experimento a viris Cl. Lieberkunio, & Hallero inſtituto, V. Haller de reſpir. part, II, § 39, part, III, § 16.

mena producere. Proinde verosimile est ab aperto in vacuo pectoris cavo aërem erupturum non secus ac ab arteria, aut vena in eodem vacuo pertusa cernitur prodire.

LXXI Quamquam vero aërem internum cum externo aëre ad aequilibrium componi in pulmone inprimis existimem (XI, XII), ejusque aequilibrii servati aut restituti maximam esse utilitatem (XVII), haud tamen censeo hunc fuisse praecipuum pulmonis finem. Nam primo rarissime aut numquam natura tantam producit in pondere atmospherae mutationem, quae ipsius aequilibrium cum interno aëre insigniter valeat perturbare; dein etsi lentius, reparari tamen per alimenta id aequilibrium potuisset (X), & pulmo qualis in frigidis, aut insectorum tracheae ei promtius restituendo suffecissent: imo vero in piscibus, qui mutationi externae pressionis maxime sunt obnoxii, alia proculdubio ratione restituitur. Quare cum pulmo humano similis nonnisi calidis animalibus datus fuerit, concludendum videtur exhalationem, & inde consequens refrigerium, quibus calida animalia maxime egent, primarium esse respirationis usum. Vid. cap. praec.

JOANNIS PETRI MARIAE
D A N A
De Solano melanocerafo H. R. Taur.

Quamquam Celeberr. LINNAEUS in eximio opere, quo PLANTARUM SPECIES complecti nititur, Solanum Guineenfe bis nominaverit, & ante ipfum Cl. DILLENIUS, ac BOERHAAVIUS plantam, de qua hic agitur, cognoverint; omnes tamen ipfius defcriptionem paucis complexi de viribus, & proprietatibus ejufdem nullam omnino mentionem fecerunt; nec alium Auctorem invenire datum eft, qui ipfius ufus memoriae mandaverit. Non inutile propterea duxi, paucis additis ad defcriptionem pertinentibus, in ejufdem proprietates, & ufus minime vulgares inquirere, ut demum intelligatur quomodo hucufque aut neglecta, aut fufpecta planta fuas late pandat utilitates.

Quod in Guinea fponte nafcatur BOERHAAVIUS (*Ind. alt. part. II. p. LXVIII n.° XVIII*) appellavit *Solanum Guineenfe fructu magno inftar Cerafi nigerrimo umbellato*, eodemque nomine DILLENIUS vocavit (*Eltham. p.* 336) & iconem dedit (*Tab. CCLXXIV fig.* 354) Botanicus fvecus fupra laudatus fimplici *guineenfis* Solani nomine (1) plantae fpeciem intellexit a noftra modo dicta, five a DILLENII, & BOERHAVII planta omnino diverfam, perennem, foliis laurinis. Hanc pro varietate fui *Solani nigri* pofuit, quam *guineenfem* vocat, & fic nomine tenus ab aliis varietatibus diftinguit in *Spec. plant.* (*pag.* 266). Hinc in *Syftematis naturae edit.* 12 *reformata* nullum aliud peculiare nomen *triviale* ipfi dedit. Quoniam vero per quindecim, & ultra annos in noftro Horto

botanico excultum inermes ſpinas, quibus ſpecie ſatis diſtinguitur, nunquam dimiſit; ſed conſtanter ab omnibus Solani ſpeciebus tum acinorum ſucco purpuro-colorato, tum ſtatura, aliiſque notis diverſiſſimum ſe ſe oſtendiſſe vidi; ideo pro diſtincta plane ſpecie haberi, & nominari poſſe nullus dubito. Proptereaque triviali nomine melanoceraſi optime diſtingui puto cum Cl. VIRO CAROLO ALLIONIO BOT. PROF., quod nempe apte nomen hoc exprimat fructuum, ſeu baccarum hujus Solani ſimilitudinem, quae cum nigris ceraſi fructibus intercedit: quemadmodum idipſum immortalis BOERHAAVII, & oculatiſſimi DILLENII deſcriptiva nomina ſignificare voluerunt. Sub nomine *Solani ſurinamenſis* olim in Horto R. Taurinenſi excultam oſtendebat primus Praeceptor meus VITALIANUS DONATI, an quod hoc nomine ad ipſum ſemina miſſa fuerint? vel quod Surinamum pro patria revera quoque agnoſcat? neſcio. Praeter hos, eoſque, qui notiones inde hauſerunt, vix alium invenies, qui de eodem ſcripſerit.

Planta eſt glabra, bicubitalis fere, caule anguloſo, ramoſo, ſpinis ad angulos & ramos non pungentibus ſeu inermibus. Folia *Sol. officinalis*, ſeu *nigri* L. ampliora, angulata, lanceolata, obtuſa, alterna. Flores parvi ex baſi vireſcente exalbidi, ad limbum leviter purpuro-violacei, antheris fuſcis. Baccae ſphaericae, ceraſiformes, immaturae virides, per maturitatem atrae, magnitudine nucis avellanae, vel fructus ceraſi mediocris, lucentes, in racemos ſubumbellatos diſpoſitae, nitidae, viridi pulpa, & parvis, multis albidis, compreſſis orbiculatis ſeminibus faetae, ſucco purpuro-violaceum colorem ex ſe praebente praeditae. Succus odoris potius vinoſi eſt, quam graveolentis, & narcotici,

(1) *Spec. pl. ed. 2 pag. 263; & ſyſt. nat. ed. 12 refor. pag. 173.*
(2) Miſcel. Taur. vol. V in auctar. ad H. R. Taur. Eodemque referente, ab omni tempore in Horto jam exculta fuerat haec ſpecies.

uti a reliquis plantae partibus exhalat, per fermentationem praesertim vinosum odorem emittit.

Tota planta contusa, & retortae indita pondere librarum trium unciarum decem & drachmae unius, atque summo ignis gradu calcinata caput mortuum reliquit in fundo retortae pondere unciae unius drachmarum quinque & granorum triginta, coloris atri, saporis subsalsi; quod intra fornacem calcinatum in crucibulo mediam sui ponderis partem fere adhuc amitit, & cinerem reliquit albido-rubentem, ex quo per lixiviationem eductum est sal alkali fixum pondere drachmarum trium, & granorum duorum. Si a combustis Solani coloratis acinis obtenta cinereo-salina materies, vel sal inde elixiviatum simul in vitrum abire cogatur cum silice, vel alia excolore vitrescibili substantia, vitro ipsi colorem purpureum communicare suis experimentis detexit ingenio non minus, quam sanguine clarus D. COMES MOROZZI (2), qui, ut in non paucis aliis plantarum cineribus, ita in hoc principia colorantia, fixa veluti, in igne manere expertus contendit, colorem suum, dum in vitrum transeunt, rursus ostensura. Baccae, earumrumque succus similia fere per analysim praebent principia chymica ac tota planta, licet salis fixi paulo minorem quantitatem largiantur, & aliqua in odore primae per destillationem prodeuntis aquae differentia intercedat.

Experimenta in maturo fructu, aut ejus succo recenter expresso plerumque tentata intelliguntur, nisi contrarium asseratur. Fructus obtinui ex planta tum in Horto Taurinensi Regio Botanico exculta, tum etiam ex aliis locis collinis, aut submontanis, vel campestribus satis agri Pedemontani; in quibus omnibus sub dio maturum fructum praebuit, & sua, utut annua radice hyemalis frigoris rigorem aliquando

(2) Examen physico-chimique sur la couleur des fleurs, & de quelques autres substances végétales, *Miscel. Soc. Reg. Taur. vol. V, tab. 2.*

tolleravit quando serius sata intra annum flores non dederat. Difficile propterea non erit magnam ipsius quantitatem, & ad opus quodcumque pro lubitu necessariam quotannis satione obtinere.

Cum syrupo succi expressi ab ejusdem Solani acinis maturitati proximis nonnulla experimenta institui ad aquarum quarumdam mineralium examen praesertim commoda, & necessaria; quae nimirum similes produnt significationes, quales fere a syrupo florum violarum observari solent. Item cum nostro syrupo, & cum simili successu aliqua tentavi ex multis illis experimentis, quorum seriem olim (3) prosecutus est Illustrissimus Comes De Saluce, in quo acquisitae pro multiplici scientia laudes, & honores generis antiquitati pares, & indito scientiarum, ac artium amori debiti simul refulgent.

Colorum varietas, & pulchritudo, qui ex hac planta obtinentur, & extrahuntur primam hucusque sibi considerationem merentur ob usus, quos in pictoria non minus, quam tinctoria arte pollicentur. Et sane succus a maturis, vel submaturis & coloratis baccis expressus purpuro-violacei coloris pulcherrimi est, & ad usus pictorios supra chartam opportune adhibitus per se optime cedit, suumque colorem cum pauco etiam alumine & gummi diutissime sustinet. Idem succus brevi ad siccitatem Mariae Balneo, aut aliter, antequam corruptionis notas sibi relictus praebeat, evaporatus extractum largitur, quod similem colorem servat, &, ubi opus, prodit cum pauca aqua dilutum. Neque mutationes facile sentit hic color, quas tractu temporis hujusmodi picturae sponte pleraeque subeunt: saltem supra chartam a decem, & ultra annis pictae plantae, quae hunc colorem receperunt, hucusque immutatae servantur; dum non pauci alii plantarum colorati succi his, quas sola dies affert, mutationibus facile deturpantur. Quo-

(3) In Miscellan. Taur. Vol. III p. 153.

niam vero vividiorem, & magis purpuraſcentem colorem hujus Solani baccae recentes praebent, quam ad corruptionem tendentes, non incongruum erit adnotare eaſdem per totum fere annum in aëre aperto ſervari poſſe, licet tandem flaccidae fiant, aut ſicceſcant in aëre nimis ſicco. Servandi modus multiplex eſt: ſic vel cum ramorum, quibus valde adhaerent, ſummitatibus in loco frigidiuſculo ſuſpenduntur; vel in liquore oleoſo, aut appropriato alio, ex. ca. ſpiritu vini, aut aqua aluminoſa immerſae detinentur loco frigido, ut tumentes, & ſatis ad uſum accommodatae baccae ſerventur: ob denſam nimirum cutem, qua teguntur, ſic propriam diu, quam etiam habent maturae, duritiem ſervant. Optimam aliam ſolanacei hujus coloris ſervandi methodum eam eſſe probabis, quae communis fere ſucco Solani eſt cum aliis coloratis quibuſdam liquoribus, qui ſibi relicti ſub forma fluida mutarentur, uti eſt color carthami tinctorii &c.: ſumuntur nempe ſtamina cannabis carptae, mundatae, & ad optima fila ducenda paratae; macerantur aliquantiſper in aqua; dein probe lota, & exſiccata in purum, vel praeparatum plantae ſuccum immerguntur; mox brevi exſiccata ſine expreſſione, in aëre aperto, & calido, loco clauſo, tuto, ac ſicco ſervantur ad uſum. Tincturam, qua onuſta fuerit cannabis, filaque ejus, ſimplici immerſione deinde, quolibet dato tempore, immutatam facile reſtituent aquae, ex qua fere decolor eximi poterit; & color aquae communicatus ad ſetam, ubi opus, tingendam, alioſque uſus pictorios traduci poterit. Chartae emporeticae ad ſimiles etiam uſus ſucco imbutae inſerviunt, aliaque.

Dixi ſpiritu vini quoque rubram tincturam elici ex baccis integris, earumve cortice. Haec tamen tinctura longe intenſior, & plane purpurea ex iiſdem diſruptis obtinetur, quae non, quemadmodum ſuccus, fermentationi vinoſae; & mox putrefactioni ſubjacet, ſed ſub hac forma colo-

rantes particulas poteſt diutius conſervare. Pars igitur principiorum colorantium reſinoſam indolem praeſefert, quamvis ſuccus ipſe in concreto naturaliter exiſtens totus in aqua pura ſolvi poſſit. Idipſum confirmatur experimentis, quibus conſtat purum ſuccum abſque aluminis ſubſidio ſuum ſetae colorem vividum probe communicare; quod coloribus ſimpliciter gummoſo-extractivis vix convenit, ſaltem his minus proprium cenſetur teſte Clariſſimo MACQUERO. (4) Sperandum propterea videtur ob eam cauſam, quod reſinoſo etiam principio vis inhaereat tinctoria, perfectiores, & ſolidiores adhuc has, aliaſque reddi poſſe tincturas ex continuata horum, aliorumque cum hoc Solano inſtituendorum experimentorum ſerie.

Non omnia nunc recenſebo experimenta a me facta ſupra Solani hujus melanoceraſi plantam, & praeſertim ſupra ſuccum baccarum ejus recentem, vel ad extracti formam per evaporationem redactum, ut ipſius indolem detegerem. Aliqua tantum attingam, quoniam naturam, & proprietates reſpiciunt ſtirpis, a nemine, quod ſciam, ante hanc diem accurate perpenſas. Sic recenter expreſſus purpureus Solani melanoceraſi ſuccus ab aceti ſpiritu, & ab ipſo aceto plus minuſve purpuro-griſeum colorem induit; a ſucco limonum dilute & pallide rubentem; a ſtillatitiis ſpiritibus acidis ſalis marini, & nitri in aqua dilutis plus minus intenſe rubrum, coccineumque; ab oleo vitrioli ſimiliter ſoluto vividiſſimum cinnabarinum, qui ſibi diutius relictus in luteſcentem vergit, & demum flocculos in fluido innatantes ſenſim prodit. Cum aluminis ſolutione idem ſuccus dat laete caeruleum colorem variae intenſitatis pro varia utriuſque ad diluentem aquam proportione, qui memoratis picturis commode inſervit. Vitriolum martis obſcure caeruleum, at mutabilem

(4) Paſſim in ſuo dictionario chymico anonymo; & in egregio opere *l'art de la teinture en ſoy*.

reddit. Alkalini ſales, calx, & aquâ calcis ad viridem diverſimode diſponunt, ac immutant. Attamen, ſi ad telas pingendas adhibeatur, praeſtat, experientia teſte, cum calce miſcere, quam cum ſalibus, quorum actione fortaſſe nimia, lintea debiliora reddi poſſent; & ſucci pars in flocculos per liquidum diſperſos cogi: ſic viridis optimus color vili praetio habebitur.

Quod ſi maturеſcentes eaedem baccae contuſae, fermentationem vinoſam paſſae putrefactionem ſponte ſuccedentem ſuſtineant, & expreſſus inde foetens (6) liquor lente ad ignem evaporet, obſcurum extractum habebitur, cujus colorem *umbraticum* appellare poſſemus, ob ſuam ad corporum umbras praeſertim ſupra chartam pingendas utilitatem. Hic color prae caeteris optimus eſt ad ſicceſcentes plantarum partes, praecipue ad earumdem caules, & non paucas radices perfecte imitandas, quin mutationibus facile ſubjiciantur picturae exinde elaboratae.

Verum

(6) Hunc foetorem tandem poſt ſex, & ultra menſes ſervatus, & ad ſolem expoſitus in vitrea ampla phiala obturaculo chartaceo tecta, fere amiſit, & in liquamen abiit, quod decantatum conſpiciendam in vaſis fundo reliquit materiam grumoſe concretam, nec cryſtallizatam, in aqua fontis nullatenus, & ex parte tantum in ſpiritu vini ſolubilem, aqua ſpecifice leviorem, indeque ſupernatantem, terrae fullonicae, ſaponi, vel ſinectidi exteriori facie ſimilem, at peculiaris naturae ſubinſipidam, nauſeam moventem, parumper ingrate odoratam, exalbeſcente pallido colore praeditam. Haec inflammata oleum nigrum extus emiſit, quod laetam, nec ſcintillantem flammam diu aluit ſine ingrato odore: pauci poſt combuſtionem relicti cineres cum oleo vitrioli efferbuerunt alkalinae ſuae naturae indicio; an calcareae, vel ſalinae? hucuſque non ſum expertus. Ex dictis interim fere patet concretionem hanc novum eſſe alkalino oleoſum, & ſingulare artis productum, cujus naturam, & uſus hactenus omnino ignoramus, licet quaſdam ſaponis, alias reſinae proprietates ipſum oſtenderit.

Verum de virtutibus (7) medicis, quas hucuſque non ſum expertus, nihil addens jam alias ad ſetam tingendam a me probatas exponam (8). Quod, ut brevi fiat, aliqua tantum ex multis experimentis eligam, quae inter privatos parietes primum feci ann. 1769, 1770: tum deinde repetii, & ſum proſecutus ann. 1771, 1772 in Regio Tincturae laboratorio, ut ſpeciali in hanc rem juſſui AUGUSTISSIMI, ET INVICTISSIMI REGIS parerem, CUI colorum hoc Solano obtentorum ſpecimina quaedam non diſplicuerunt; QUIQUE ideo Perilluſtrem D. COMITEM D'AGLIÈ ab ALLADIO ad Tinctoriae, aliarumque artium culturam promovendam ſpeciatim, & ex hereditaria veluti propenſione addictum publicae utilitatis cauſa experimentis repetendis praeeſſe voluit. Theoriam horum, aliorumque experimentorum alio fortaſſe tempore una cum aliis adhuc inſtituendis prodam.

I

Sapone Maſſilienſi venali dealbata ſeta, mox indita *ſimplici tepentique baccarum Solani melanoceraſi ſucco* colorem induit ex purpureo ad violaceum tendentem, vulgo nobis dictum *d'Iſabella chiaro*, qui repetitis lotionibus, & immerſionibus non magis evanuit, nec aliae mutationi ſubje-

(7) Si ex indole plerarumque congenerum, & praeſertim ex affinitate cum Solano vulgari nigro officinarum de Solani melanoceraſi, viribus medicis aliquid per analogiam conjectare liceret, & odor, ſapor, analyſis conſulerentur, pro uſu interno infidas, & de veneno ſuſpectas protinus fore hucuſque ſuſpicarer: pro externo autem uſu fortaſſe non ſpernendas reſolventes, diſcutientes anodynas ineſſe in foliis, caulibus, & floribus: atque lenientes, detergenteſque adverſus carcinomata inſanabilia in fructuum ſucco recenti, & depurato reperiri poſſe non obſtupeſcerem.

(8) Ex antecedentium conſideratione ad applicationem principiorum colorantium ſupra ſetam deveniri poſſe putavi. Nec ſpem fefellit eventus, uti etiam ipſo tinctorum lato ſuper hanc tincturam judicio jam ſatis conſtat.

ctus fuit, quam soleat longo labore, & longe majori temporis, ac auri dispendio paratus color Lichenis Rocellae L. Italis *oricello*, aliique diversi generis, ex. gr. Carthami, Luteolae &c. Intensior ad violaceum usque fiet setae color, si post repetitam in idem tepens balneum immersionem ipsa exsiccari sinatur, quem vocant *lilla violante*.

I I

Baccae integrae *cum succo earumdem expresso coctae*, & deinde expressae balneum praebuere, in quod *ad ebullitionem usque calefactum* demersa similis seta colorem vividissimum post opportunas lotiones acquisivit griseo subpurpurascentem, quem tinctores apud nos vocant *gris de prince*. Hic variae intensitatis fuit pro varia liquoris tingentis ad setam, vel additam aquam proportione, & pro vario tempore ebullitionis. Hos colores a nulla alia planta adeo facile obtineri norunt tinctores.

I I I

Sic jam tinctis setis (n. I, II), vel ipsi balneo addita levis quantitas succi limonum colorem dat pallide subpurpureum, ut in vulgaris Colchici floribus inest, qui nobis audit *color di frejdolina chiaro*. Vividus utique per se hic etiam est, at ex laevissima Carthami florum tinctura ad roseum dilutissimum mox accedet.

I V

Eadem (n. I, II) tincta seta intensiorem florum Colchici colorem adipiscetur ex levi acidi vitriolici in multo liquido diluti, & probe mixti additione. At rigiditas inde aliqua setae infertur, unde fortasse suspectus esse posset hujus tincturae usus.

V

Succus a Solano expreſſus, & ſpiritui vini vulgari junctus, ſive *tinctura ſpirituoſa ex baccis* dealbatae, & ſiccatae ſetae colorem dabit *purpuro-rubentem*, veluti vinoſum; qui minus intenſus erit, ſi ante immerſionem ſeta non fuerit probe ſiccata. Si huic balneo ſucci limonum parva quantitas addatur, ſeta immerſa colorem acquiret leviſſime purpureum. Sed in hiſce tribus caſibus ſetae color peculiariter *lucens*, & *nitidior* erit, quod a ſpiritu vini fortaſſe provenit colorantia reſinoſa elementa intimius penetrante, ſolvente, & intra ſetam inducente. Etenim inſuper iidem quoque colores difficilius (6) mutabiles in ipſa ſeta obſervantur.

V I

Ex variorum alkalinorum additione mutationes tales balneo communicatae ſunt, ut minus facile applicandos, & minus optabiles colores ſeta deinde immerſa obtinuerit.

V I I

Exceptione tamen omnino digna ſunt bina producta alkalinae indolis, quae a Spartio ſcopario Lin. eduxit Periluſtris Comes Morozzi, mihique obtulit experiunda; ſcilicet *ſal alkali fixum* ex combuſta Spartii ſcoparii planta eductum per cineris ejuſdem elixiviationem; & *ſpiritus oleoſus alkalinus* volatilis, empyreumatico-foetidiſſimus per diſtillationem A. B. obtentus. Etenim ſive cum ſimplici Solani ſucco, ſive cum addito alumine, aliiſve, pro varia

(6) Immutabiles fere colores ſetae nemo hactenus indidit, licet dentur varii eorum mutabilitatis gradus, plus minuſve facile inducendi, dum aëri, & Soli ſeta diutius exponitur.

ingredientium applicatione, & proportione, ea producta communicant immersae setae varios colores maxime nitidos, & vivaces, griseos, argenteos, atque caerulescentes. Si loco salis Spartii modo laudati sal aliud alkali fixum ex. gr. tartari adhibeatur, memorati colores nullatenus sese produnt: unde etiam eruitur notabile horum fixorum salium, novumque discrimen; utlibet in pluribus aliis proprietatibus inter se vere conveniant.

V I I I.

Solani succus in aqua leviter nitrata solutus griseum pulchrum caeteris intensiorem setae colorem communicat.

I X

Seta sapone minime dealbata, seu cruda, tum etiam alumine nullatenus penetrata hujus tincturas, seu principia colorantia baccarum Solani per se satis facile, & melius recipit, & firmius tenet, quam sapone, & alumine praeparata. Immo, si saponem adhibitum nimia copia alkalini salis ingrediatur, praestabit semel setam intra aquam limonum succo leviter acidulatam immergere, tum ex aqua fontis saepius eluere, ut deinde purpureus color melius, nec ad caeruleum inclinans setae communicetur per Solani succum tingendae.

X

Praeter hucusque dictos colores alii enati sunt ex quorumdam tincturae ingredientium connubio, medii veluti, & quales ab alterutro ingredientium obtineri non possunt. Inter hos fuit supra setam color nuceus variae intensitatis ad rubicundum vergens; murinus, griseus margaritaceus clarus, caerulans, caffè tosti, vel magis clari, & rubescentis, &c. de quibus nihil addo, quia aeque solidi ac optimi magis facile, aut minori sumptu aliter parari possunt.

SECOND MÉMOIRE

Sur la differente dissolubilité de sels neutres dans l'esprit de vin, (1) contenant des observations particulières sur plusieurs de ces sels.

PAR M.r MAQUER.

Quoique l'objet que j'aie eu principalement en vüe dans ce travail, ait été de reconnoitre l'action de l'esprit de vin sur les sels neutres, c'est-à-dire sur les composés qui résultent de l'union d'un acide quelconque avec une substance de quelque nature qu'elle soit, j'ai senti cependant, en continuant ces recherches, qu'il étoit nécéssaire de les étendre encore plus loin, & de déterminer, autant que cela seroit possible, la manière dont l'esprit de vin agit sur les substances mêmes, dont l'union peut former des sels neutres.

Les phénomènes de combinaisons que présente ce dissolvant avec les acides vitriolique, nitreux & marin, étant déjà bien connus par les travaux d' un grand nombre de Chimistes très-éclairés, j'ai cru qu'il étoit inutile de revenir sur cette matière qui paroit éclaircie autant qu'elle peut l'être. Mais il n'en est pas de même de ceux que l' esprit ardent peut offrir avec les substances susceptibles de s' unir aux acides, & principalement avec les matières salines alkalines. J'ai pensé par cette raison qu' il étoit à propos de faire quelques expériences sur ces dernières, avant d'aller

(1) Le premier Mémoire se trouve dans le III Vol.

plus loin ; il auroit même, ſans-doute, été mieux de s'en occuper d'abord ; mais dans des recherches comme celles-ci qui n'ont pour but que de bien conſtater des faits eſſentiels à connoître, & de raſſembler des matériaux qui pourront être employés par la ſuite avec ſuccès, il eſt toujours tems de fouiller dans la carrière & d'en extraire les matières premières. Je reviendrai donc, pour ainſi dire ici, ſur mes pas ; je commencerai par l'examen des phénomènes qu'offre l'eſprit de vin avec les alkalis fixes, végétal & minéral, avec l'alkali volatil, enſuite avant que de traiter des ſels neutres tartareux ou tartres ſolubles, dont il s'agira principalement dans ce ſecond mémoire, je reconnoitrai la manière dont ſe comporte l'acide tartareux pur avec l'eſprit de vin, & enfin je le terminerai par deux épreuves ſur l'arſenic & le ſel neutre arſenical, qui ſeront ici des eſpéces de hors d'œuvre, mais qui doivent cependant entrer quelque part dans un travail de la nature de celui-ci.

Alkali fixe du tartre.

J'ai pris de l'alkali fixe du tartre, très-blanc, très-ſec, purifié avec tout le ſoin poſſible par les diſſolutions, filtrations, & déſiccation parfaite ; j'ai fait bouillir deſſus dans un matras, du même eſprit de vin qui m'avoit ſervi pour les expériences de mon premier mémoire.

Au premier contact de l'eſprit de vin, l'alkali a commencé par ſe pelotter, & enſuite a formé par l'ebullition, une ſorte de liqueur épaiſſe blanche & trouble qui occupoit le fond du matras. Cette eſpéce de liquefaction du ſel alkali eſt due, comme l'on ſait, à une petite portion de flegme dont l'eſprit de vin le mieux rectifié n'eſt jamais entièrement exempt, quand il l'à été par la ſimple diſtillation, ſans aucun intermède, tel que l'eſt celui dont je me ſers. Je dois faire obſerver auſſi que dans l'expé-

rience dont je parle là quantité de l'esprit de vin étoit trois fois plus grande que celle de l'alkali.

Après l'ebullition, j'ai décanté l'esprit de vin encore très-chaud, puis je l'ai filtré par le papier gris quoi qu'il fut fort clair; il a passé très-limpide.

Quelques gouttes de cet esprit de vin mises sur une glace se sont évaporées en assez peu de tems à l'air libre, & y ont laissé des cristaux figurés en lames d'épée; quelques uns de ces cristaux étoient solitaires; mais la plus part étoient croisés deux à deux l'un sur l'autre, avec cette singularité, que l'un beaucoup moins long que l'autre coupoit ce dernier à angles droits vers une de ses extrémités de manière qu' ils representoient ensemble une croix, ou encore mieux une de ces épées à l'antique dont la poignée & la garde forment une croix.

J'ai fait évaporer à une chaleur douce de bain de sable cet esprit de vin qui avoit bouilli sur l'alkali fixe du tartre, à mesure que la liqueur s'évaporoit, elle contractoit une couleur d'abord jaune, puis roussâtre & une saveur acre alkaline.

Lors qu'elle a été évaporée aux trois quarts, j'en ai mis une portion dans une capsule de verre, pour la laisser achever de s'évaporer à la seule chaleur de l'air; il s'est formé dans celle-ci des cristaux d'une forme toute différente : c' étoient des pyramides quadrangulaires fort basses, dont les élemens étoient des quarrés réguliers, posés les uns sur les autres, & décroissans depuis la base, jusqu'au sommet; on distinguait très-bien au microscope la séparation de ces élémens quarrés qui formoient comme des espéces d'escaliers, ou de gradins sur chaque face de la pyramide.

Une demi once du même esprit de vin qui avoit bouilli sur l'alkali du tartre, évaporée tout de suite jusqu' à siccité au bain de sable à une chaleur assez forte, dans une

petite tasse ou capsule de porcelaine, a laissé deux grains d'une matière rousse, foncée, dans laquelle il n'y avoit aucune cristallisation. Cette matière avoit une saveur âcre alkaline, verdissoit fortement le syrop violat, & avoit les caractères d'un composé huileux, savonneux alkalin; elle se dissolvoit également bien dans l'eau, ou dans l'esprit de vin.

La flamme d'une autre demi once du même esprit de vin, ne differoit point sensiblement de celle de l'esprit de vin pur, il est resté dans la capsule qui avoit servi à cette déflagration un enduit d'une matière toute semblable à celle que je viens de décrire.

Une circonstance remarquable de l'expérience dont je viens de rendre compte, c'est que l'espéce de dissolution aqueuse de l'alkali sur lequel j'avois fait bouillir l'esprit de vin, s'est coagulée toute entière par le seul refroidissement, en une masse blanche, saline, cristallisée, mais en cristaux infiniment petits, confus, entassés, & dont je n'ai pu déterminer d'abord la forme à cause de leur petitesse & probablement aussi à cause de leur irrégularité & de leur confusion.

L'ayant redissous dans de l'eau & laissé cristalliser dans une capsule de verre, j'ai obtenu une cristallisation en belles ramifications composées d'aiguilles ou de filamens longs; mais qui par cela même ne me présentant point de cristaux solitaires, ne m'en laissoit point distinguer la vraie forme; il y avoit cependant dans des intervalles de ces ramifications quelques cristaux solitaires très-petits, bien reguliers, & formant des tranches de prismes exagonaux ou des solides absolument semblables à des carreaux de chambre.

On fait pour l'usage de la médecine une préparation nommée *teinture de sel de tartre* & qui consiste à verser sur de l'alkali fixe de tartre, bien calciné & encore tout

chaud, de l' eſprit de vin rectifié, & à laiſſer ce mélange en digeſtion dans un matras au bain de ſable pendant plusieurs jours, ou juſqu' à ce que l' eſprit de vin ait acquis une couleur jaune foncée.

Le reſultat de cette préparation devant avoir beaucoup de rapport avec celui de l' expérience dont je viens de rendre compte, j' ai voulu comparer l' un à l' autre.

J' avois environ dix ou douze onces de cette teinture de ſel de tartre extremement foncée en couleur, & qui étoit dans mon laboratoire depuis plus de vingt ans dans une bouteille bouchée d' un ſimple bouchon de liège.

J' ai trouvé en l' examinant que cette liqueur avoit perdu une partie de ſa couleur, quoi qu' elle en conſervat encore beaucoup, & qu' il s' étoit formé au fond un depôt partie liquide, partie ſolide d' une intenſité de couleur beaucoup plus grande.

Cette liqueur verdiſſoit le ſyrop violat, avoit une ſaveur mêlée de la ſpiritueuſe, & de l' alkaline. Sa flamme ne différoit point ſenſiblement de celle de l' eſprit de vin pur. En ayant fait évaporer une portion dans une capſule de verre à l' air libre, après que la liqueur a été évaporeé à peu près au trois quarts, j' ai obſerve qu' elle paroiſſoit un mélange de deux liqueurs très différentes, & très diſtinctes; l' une ſans couleur comme de l' eau, & l' autre d' un jaune foncé; cette dernière nageoit dans la première en forme de gouttes ou de globules exactement ſemblables à ceux d' une huile jaune qui auroit été mêlée avec de l' eau par la ſecouſſe. Après l'évaporation totale, à une chaleur douce de bain de ſable, elle a laiſſé dans la capſule un enduit d' un jaune brun, criſtaliſé confuſement, mais formant cependant très ſenſiblement des lames en quarrés longs.

Au fond de la bouteille qui contenoit cette ancienne teinture de ſel de tartre; il y avoit, comme je l'ai dit,

un dépôt dont une partie étoit fluide, & formoit environ deux gros d'une liqueur tranſparente, mais d'un jaune fort brun.

J'ai ſéparé cette liqueur par l'entonnoir; elle ne s'eſt point diſſoute dans de nouvel eſprit de vin que j'ai verſé deſſus; ſa ſaveur étoit acre, très alkaline, & nullement ſpiritueuſe: par l'évaporation à l'air libre elle s'eſt épaiſſie, & a formé différentes criſtalliſations; elle s'eſt diſſoute entièrement dans l'eau; l'acide marin affoibli, s'y eſt mêlé avec effervescence, & en a ſéparé des floccons bruns.

Cette liqueur étoit, comme je l'ai dit, au fond de la bouteille mêlée d'une certaine quantité de matière ſolide de même couleur; cette derniere examinée ſéparément avoit une conſiſtance gélatineuſe, elle ne s'eſt laiſſé diſſoudre, ni par l'eau, ni par l'eſprit de vin, ni par les alkalis, ni par les acides.

Toute la bouteille étoit enduite intérieurement d'une pellicule, preſque ſemblable pour le coup d'œil aux incruſtations que fait l'eau de chaux, & a reſiſté à tous les diſſolvans, & à tous les frottemens que j'ai pu employer pour l'enlever.

Enfin pour terminer ce qui concerne cette ancienne teinture de ſel de tartre, j'en ai pris une demi once de très claire, & bien ſéparée des différens dépôts dont je viens de parler, & l'ayant fait évaporer au bain de ſable juſqu'à ſiccité dans une capſule de porcelaine, elle y a laiſſé dix grains d'un réſidu de couleur de caramel, ou ſucre à demi brulé; ce réſidu étoit alkalin, ſavonneux, très déliqueſcent, & d'une odeur forte que je ne puis comparer à aucune odeur connue.

Ces effets de l'eſprit de vin ſur l'alkali fixe végétal prouvent bien manifeſtement qu'il en peut diſſoudre, ſurtout avec le temps une quantité aſſez ſenſible; mais il eſt

essentiel de remarquer que cette dissolution n' est point entièrement semblable à celle des sels neutres dans l'eau, ou même dans l' esprit de vin, car dans ces dernieres ni le dissolvant ni le sel dissous ne reçoivent d' altération sensible; ce dont on peut s' assurer en les examinant après les avoir séparés l' un de l' autre, au lieu que dans celle de l' alkali fixe par l' esprit de vin, il paroit que ces deux substances s'alterent & se décomposent en partie, & reciproquement.

L' état de l' alkali fixe qui a été dissous dans l' esprit de vin, & qui en a été ensuite séparé, soit par l' évaporation de ce dissolvant, comme dans la première experience, soit par dépôt, & avec le temps, comme dans mon ancienne teinture de sel de tartre, prouve qu' il est chargé d' une matière huileuse qu' il a extraite de l' esprit de vin, ou qu' il a formée en agissant sur les principes de ce composé, & d' une autre part, le dépôt solide gélatineux, ainsi que l' enduit terreux de la bouteille, qui proviennent sans doute de l' alkali, indiquent que cette matière saline, est aussi en partie décomposée par l' action de l' esprit de vin; mais je n' entreprends point pour le présent de déterminer exactement en quoi consistent ces altérations, & quelles en sont les causes, par ce qu' il faudroit pour celà une nombreuse suite d' expériences d' un genre tout différent de celles dont il s' agit dans ce mémoire, & qui me détourneroit de mon objet, au quel je reviens en examinant suivant mon plan d' autres matières salines.

Alkali marin.

L' eſprit de vin, après avoir bouilli ſur ce ſel bien deſſeché, & après avoir été filtré, a brulé avec une flamme qui ne différoit pas bien ſenſiblement de celle de l' eſprit de vin pur, il avoit une ſaveur un peu ſalée; ſoumis à l' évaporation au bain de ſable, lorſqu' il a été diminué à peu près des trois quarts, il avoit une couleur rouſſâtre, & une ſaveur un peu ſalée, une partie de cette liqueur reduite, & évaporée à l' air libre ſur une glace, y a laiſſé des criſtaux cubiques bien réguliers.

La demi once de cęt eſprit de vin évaporée juſqu' à ſiccité, dans une capſule de porcelaine, a laiſſé deux grains d' une matière ſaline, rouſſâtre d' une ſaveur de ſel marin.

On voit par cette expérience que l' alkali minéral ſe comporte avec l' eſprit de vin de même que l' alkali végétal; il s' en diſſout la même quantité $\frac{2}{288}$. La couleur rouſſâtre de celui qui a été diſſous indique qu' il agit auſſi ſur la partie huileuſe, de l' eſprit de vin ou ſur les principes de ce composé qui ſont propres à former une combinaiſon huileuſe, de la même manière que le fait l' alkali fixe végétal.

Alkali volatil du ſel ammoniac.

Je me ſuis ſervi pour reconnoître la diſſolubilité de cette matière ſaline dans l'eſprit de vin, de l'alkali volatil concret qui avoit été dégagé du ſel-ammoniac par l'intermède de l' alkali fixe végétal, j'ai laiſſé èvaporer à l' air libre ſur une glace une portion de l' eſprit de vin bien filtré que j' avois fait bouillir dans un matras ſur cet alkali volatil; il s' eſt formé par cette évaporation une criſtalliſation aſſez abondante dans la quelle je n' ai pu diſtinguer même à l' aide d' une forte loupe aucun criſtal ſolitaire ou iſolé

d' une

d' une forme regulière ; mais l' enſemble de cette criſtalliſation repréſentoit tout ce qu' on peut imaginer de plus beau & de mieux deſſiné en ramifications, arboriſations, tiges très agréablement courbées, & garnies de larges feuillages. Mais par le refroidiſſement du reſte de la liqueur dans une fiole bouchée, il s' eſt formé une quantité aſſez conſidérable de criſtaux ſéparés, & non groupés, figurés comme des tranches de colonnes priſmatiques à ſix côtés, ſans y comprendre les faces ſupérieure & inférieure, qui étoient les deux grandes faces de chaque criſtal; ces faces étoient par conſéquent des exagones; mais il n' y en avoit qu' un petit nombre qui fuſſent réguliers: dans la plus part il y avoit un, deux, ou trois côtés plus petits que les autres.

Voila, comme on voit deux criſtalliſations bien différentes l' une de l' autre d' une même matière ſaline, diſſoute dans la meme liqueur, mais la première s' eſt faite par l' évaporation ſur une ſurface plane, & la ſeconde par le refroidiſſement dans un vaiſſeau ſphérique, & ç' a été ſans doute de ces ſeules différences qu' a dépendu la forme ſi defférente de ces deux criſtalliſations; ces effets ſont très ordinaires dans la criſtalliſation; ils prouvent combien il reſte d' obſervations à faire ſur les phénomènes de cette opération importante.

Je crois qu' on peut conclure de ce que je viens d' expoſer, que le vraie forme des criſtaux de l' alkali volatil concret eſt celle que j'ai obtenue par le refroidiſſement ſans évaporation, & je préſume que ce moyen eſt le ſeul d' obtenir des criſtaux ſolitaires, & réguliers de cette matière ſaline.

L' alkali volatil étant aumoins auſſi évaporable que l'eſprit de vin, je ne pouvois me ſervir de l' évaporation pour déterminer combien l' eſprit de vin pouvoit en diſſoudre à l'aide de la chaleur de l' ébullition comme je l' ai pratiqué

pour tous les autres ſels; & la diſtillation étant une véritable évaporation dans les vaiſſeaux clos, ce dernier moyen ne paroiſſoit guère plus propre que le premier à remplir mon objet; j' ai voulu voir néanmoins ſi à l'aide d' une chaleur bien ménagée dans les vaiſſeaux clos, on ne pourroit point parvenir à faire la ſéparation que j' avois en vue; j' ai donc mis dans une cornue de verre de mon eſprit de vin encore chaud & ſaturé d' alkali volatil par l' ébullition, & après y avoir luté un récipient très exactement, j' ai procédé à la diſtillation à une chaleur des plus foibles du bain de ſable. Il a paſſé d' abord de l'alkali volatil qui s' eſt criſtalliſé en belles ramifications ſur les parois du récipient; mais preſque en même temps, il eſt monté auſſi de l' eſprit de vin encore très chargé d'alkali volatil, & la diſtillation ayant été ceſſée après que les trois quarts de la liqueur ont été paſſé dans le récipient, le quart reſtant dans la cornue s' eſt trouvé, à en juger par ſon odeur, tout auſſi chargé d' alkali volatil qu' il l' étoit avant cette opération, & j' en ai conclu qu' il falloit avoir recours à un autre moyen pour déterminer la quantité d' alkali volatil que l' eſprit de vin peut diſſoudre à l' aide de l' ébullition.

Pour y parvenir j' ai mis dans une fiole un gros d' alkali volatil concret; j' ai fait bouillir deſſus, la fiole étant bouchée, une once de mon eſprit de vin; enſuite je l'ai décanté tout chaud, & après avoir laiſſé bien égouter la fiole, & le ſel qu' elle contenoit, j' ai trouvé qu' elle ne contenoit plus qu' un demi gros de ſel, d' ou j'ai conclu que la demi once d' eſprit de vin avoit diſſous, à l' aide de l' ébullition, 18 grains ou $\frac{18}{288}$ d' alkali volatil concret.

J' ai obſervé dans cette expérience que, malgré la promptitude avec la quelle j' avois décanté l' eſprit de vin, chargé d' alkali volatil, le peu qui en étoit reſté adhérent au col, & aux parois du matras, y avoit formé, avant qu' il pût

être parfaitement égouté, des criſtalliſations, partie en aiguilles entre croiſées, partie en criſtaux exagonaux ſemblables à ceux qui ont été décrits ci-deſſus.

Les phénomènes de criſtalliſation par refroidiſſement & par évaporation que l' alkali volatil m' avoit préſentés avec l' eſprit de vin, m' ont paru mériter que je vérifiaſſe s'ils ſeroient les mêmes avec l'eau, j' ai donc fait diſſoudre, à l' aide de la chaleur beaucoup d'alkali volatil dans de l'eau pure, & ayant bien bouché la fiole dans la quelle cette diſſolution s' étoit faite, je l' ai laiſſé refroidir à l' air, le termométre de Réaumur étant alors à 13 dégrés au deſſus de zero; il s' eſt formé par le refroidiſſement une grande quantité de criſtaux ſolitaires en partie à la ſurface, mais en plus grande quantité au fond de la liqueur; ces criſtaux avoient exactement la même forme éxagonale que ceux qui s' étoient formés par refroidiſſement dans l' eſprit de vin; il n' y avoit point d' aiguilles ni de ramifications aux parois de la bouteille.

Après que cette liqueur a eu dépoſé ces criſtaux par refroidiſſement, j' en ai mis une portion ſur une glace plane, pour la faire criſtalliſer par évaporation; il s' y eſt formé encore quelques criſtaux ſemblables aux précédens; mais la plus grande partie de la criſtalliſation s' eſt faite en belles ramifications branchues; il eſt à remarquer qu' elles étoient toutes formées par des lignes droites, faiſant différens angles les unes avec les autres, & ſans aucune de ces belles courbures, dont j' ai parlé plus haut; il y avoit parmi ces criſtaux un aſſez grand nombre d' aiguilles priſmatiques quadrangulaires.

Je ferai remarquer de plus qu' ayant voulu faire criſtalliſer de même par évaporation une diſſolution d' alkali volatil dans l' eſprit de vin, la quelle avoit dépoſé depuis huit jours tout ce qu'elle pouvoit former de criſtaux par le refroidiſſement, elle n' a formé par l' évaporation ſur la

glace plane aucune eſpèce de ramifications, mais ſeulement une grande quantité de criſtaux très petits & informes, comme des grains de ſablon, ce qui me fait préſumer que l' alkali volatil ne peut ſe criſtalliſer en ramifications, & ſurtout prendre des formes courbes agréables que lors qu' il n' eſt étendu que par une petite quantité de diſſolvant ſpiritueux, ou peut-être même ſimplement aqueux, mais ces phénomènes de criſtalliſation m'éloignant de mon objet principal, je me hâte d' y revenir par l' examen de la diſſolubilité de différens ſels neutres dans l' eſprit de vin, & je commence par pluſieurs tartres ſolubles.

Tartre ſoluble, ou ſel végétal.

Ce ſel réſulte, comme on ſait de la ſaturation de la crême de tartre par l' alkali fixe du tartre, ou végétal.

L'eſprit de vin ayant bouilli ſur ce ſel bien deſſeché, puis ayant été filtré tout chaud a fourni par l' évaporation juſqu' à ſiccité dans une capſule de porcelaine une matière ſaline jaunâtre, à raiſon de deux grains, ou $\frac{2}{288}$ par demi once.

La flamme de cet eſprit de vin étoit un peu décrépitante, ce qui n' arrive point à celle de l' eſprit de vin pur.

Ce diſſolvant chargé de ce ſel a fourni par l' évaporation ſpontanée, dans une capſule de verre, des criſtaux en piramides quadrangulairés, dont quelques unes étoient tronquées par la pointe: pluſieurs de ces criſtaux étoient ſolitaires, & très réguliers, l' eau chargée de ce même ſel a donné par l' évaporation à l' air libre, dans une capſule de verre, des criſtaux, dont quelques uns étoient ſolitaires, & formés en priſmes à quatre côtés pointus par les deux bouts: ceux qui étoient groupés étoient joints en grand nombre tous par un de leurs bouts, & formoient des aſſemblages en rond tout heriſſés. La couleur jaune du ſel

végétal ſéparé de l' eſprit de vin par l'évaporation à ſiccité ſemble indiquer que ce ſel reçoit quelque altération par ſa diſſolution dans l' eſprit de vin, & par ſa deſiccation, & ce qui confirme ce ſoupçon, c' eſt que le ſel ſur le quel l' eſprit de vin avoit bouilli, rediſſous dans l'eau n' a fait qu' une diſſolution trouble.

Sel de Saignette.

L' eſprit de vin n' a point diſſous une quantité appréciable de ce ſel bien deſſeché à l' air, & la flamme de celui qui avoit bouilli deſſus ne differoit point de celle de l' eſprit de vin pur. Mais ayant voulu répéter cette expérience en me ſervant de ſel de ſaignette non deſſeché, criſtalliſé, & contenant par conſéquent ſon eau de criſtalliſation, cela m' a donné lieu d' obſerver un effet qui me paroit ſingulier, & que je ne dois pas paſſer ſous ſilence; c' eſt que au dégré de chaleur néceſſaire pour faire bouillir l' eſprit de vin, le quel, comme l' on ſait n' eſt pas bien conſidérable, ce ſel s' eſt liquefié ſous l' eſprit de vin, & a formé une liqueur fluide, & tranſparente comme de l' eau; cette liqueur occupoit le fond du matras: elle s' eſt coagulée par le refroidiſſement en une maſſe ſaline ſolide, & d' une ſeule pièce.

Cet effet prouve la grande facilité qu' a le ſel de ſaignette à ſe liquefier à l'aide de ſon eau de criſtalliſation; mais il en réſulte auſſi que l' eſprit de vin ne peut lui enlever cette même eau, quoiqu' il la perde par la ſeule action de l' air. En ſeroit-il de même de tous les autres ſels? C' eſt ce qui n' eſt pas à préſumer; il y a lieu de croire au contraire qu' on trouvera à cet égard une grande diverſité dans les différens ſels neutres; mais c' eſt auſſi ce qu' on ne pourra connoître que par une nouvelle ſuite d' expériences dépendantes de celles que j' ai commencées, & qui mérite bien d' être entrepriſe.

Tartre ſoluble par la chaux.

Ce ſel étoit en très beaux & gros criſtaux tranſparens; traité avec l'eſprit de vin comme le precédent, ſans deſiccation préliminaire, il s'eſt comporté de même, mais il ne m'a pas préſenté le phénomène de la liquéfaction ſous l'eſprit de vin.

Tartre ſoluble ammoniacal.

J'ai verſé une diſſolution d'alkali volatil concret ſur de la crême de tartre reduite en poudre fine, & miſe dans un matras; il s'eſt excité à froid une effervefcence aſſez conſidérable, une grande partie de la crême de tartre a été diſſoute, & la diſſolution a été achevée à l'aide de la chaleur modérée du bain de ſable, avec une legère effervefcence; j'ai ajouté à deſſein un peu d'excés d'alkali volatil, puis ayant filtré la liqueur toute chaude, elle a paſſé très tranſparente, d'un beau jaune foncé, & d'une ſaveur de ſel végétal,

Cette liqueur évaporée à l'air libre ſur une glace a formé une criſtalliſation compoſée d'aiguilles en lames longues, & tronquées, partant d'un centre, ou d'un pédicule commun, & repréſentant par leur divergence une eſpèce d'eventail.

Une autre portion de la même liqueur évaporée au bain de ſable juſqu'à pellicule dans une capſule de verre a donné par le refroidiſſement deux ſortes de criſtaux, fort différens, pour la forme; les uns étoient de petits criſtaux allongés, renflés par le milieu, & ſe terminant en longues pointes par chaque bout, comme des fuſeaux; les autres qui ſe ſont formés les derniers, & à ce que je crois autant par évaporation que par refroidiſſement, étoient de gros priſmes à quatre, cinq, & ſix côtés. Quoiqu'ils fuſſent

ſolitaires, ils paroiſſoient de même eſpèce que ceux qui s' étoient aſſemblés en éventail ſur la glace. Le reſte de la liqueur évaporée dans une capſule à une chaleur douce de bain de ſable, mais juſqu'à forte pellicule a donné par le refroidiſſement & par l' évaporation, qui continuoit encore, les mêmes criſtalliſations en éventail; mais les rayons au lieu d' être des lames, comme ceux qui s' étoient formés ſur la glace, étoient des priſmes comme ceux dont il a été parlé plus haut à cauſe de la profondeur du vaſe dans le quel cette dernière criſtalliſation s'étoit faite: comme ces criſtaux n' étoient pas tous d' une égale longueur, ils repréſentoient aſſez bien une gloire rayonnante pareille à celles que font les peintres, & les ſculpteurs.

Le tartre ſoluble ammoniacal étant de nature à ſe décompoſer par une chaleur fort peu conſidérable, je n' ai oſé le porter à la plus grande ſiccité, dans la crainte de l' altérer; mais après lui avoir enlevé toute humidité ſurabondante le plus qu' il a été poſſible par une deſiccation bien ménagée, je l' ai fait bouillir dans l' eſprit de vin, comme les précédens.

Cet eſprit de vin filtré a brulé comme l' eſprit de vin pur; ſa flamme étoit ſeulement accompagnée de quelques petites fulgurations rouges. En en faiſant évaporer une demi once dans la capſule de porcelaine, j' ai remarqué qu' il répandoit une odeur plus ſuave que celle de l' eſprit de vin ordinaire, & cette demi once, après ſon entière évaporation a laiſſé un enduit d' un jaune brun peſant un grain & demi. Ce réſidu ne ſe diſſolvoit pas dans l' eau, & n' étoit par conſequent ni une matière ſaline, ni une matière ſavonneuſe, il s' eſt très bien rediſſous dans de nouvel eſprit de vin. Je crois qu'on ne peut le regarder que comme une portion d' huile qui ſe ſépare, ſoit de la crême de tartre, ſoit de l' alkali volatil, ſoit enfin de l'un & de l' autre lors qu' on les combine: c' étoit probablement à

cette partie huileuse qu' étoit düe la couleur jaune de ma dissolution de tartre soluble ammoniacal dont j' ai fait mention en commençant cet article.

Avant de le finir je ne dois pas oublier de faire mention d' un petit dépôt salin singulier en petits grains irréguliers, & mêmes comme ceux du sablon le plus fin, qui s' est séparé par le refroidissement de ma dissolution de tartre soluble ammoniacal; j' en avois trop peu pour en faire un examen exact; je me suis contenté de m' assurer que cette matière craquoit sous la dent, qu' elle n' avoit point de saveur bien sensible, ni presque de dissolubilité dans l'eau, & enfin que l' acide vitriolique, non plus que l' alkali fixe, ne lui ont occasionné aucun changement sensible. Cette matière provenoit sans doute de la crême de tartre, & mérite d' être examinée avec plus de détail, car la crême de tartre elle même n' est pas encore bien connue. M. Margraf, & M. Rouelle ont prouvé par des expériences décisives qu' elle contenoit de l' alkali fixe végétal tout formé, & c' est assurément une connoissance essentielle dont nous sommes redevables à ces celèbres chymistes; mais cet alkali n' est point libre dans la crême de tartre; il y est certainement combiné avec quelqu' autre substance, peut-être même avec plusieurs qui ne peuvent être bien connues que par de nouvelles recherches.

Tartre soluble antimonié, ou Tartre émétique.

Ce sel que j' ai employé cristallisé, & bien sec s' est comporté avec l'esprit de vin comme le tartre soluble par la chaux; il n' a occasionné aucun changement à sa flamme; une demi once de l' esprit de vin qui avoit bouilli dessus n' a laissé après son entière évaporation dans la capsule de porcelaine qu' une tache assez légère d' un enduit de couleur de maron, de nature huileuse, & que l' eau

ne

ne dissolvoit point. J' ai cependant remarqué que les parois de la bouteille dans la quelle avoit été filtré l' esprit de vin tout chaud après avoir bouilli sur le tartre émétique étoient garnis dans quelques endroits de cristaux longs plus fins que des cheveux, implantés diversement par une de leurs extrémités les uns sur les autres; mais ces cristaux étoient si fins, & en si petite quantité que j' estime qu'ils ne pouvoient guère peser en tout qu' un quarantième, ou même un cinquantième de grain.

Arsenic.

En versant l' esprit de vin à froid sur de l' arsenic blanc, cristallin, & en poudre fine j' ai observé que cette liqueur le mouilloit bien plus facilement que l' eau ne le mouille; elle en a dissous à l' aide de l' ebullition $\frac{1}{75}$ de son poids ou $\frac{4}{288}$; le résidu de l' évaporation étoit verdâtre; la flamme de l' esprit de vin chargé d' arsenic ne m' a paru avoir rien de particulier.

Sel neutre arsénical.

Ce sel, que j' ai fait connoître dans les mémoires de l' académie des sciences de Paris année 1746, s' est dissous dans l' esprit de vin bouillant dans la proportion de trois grains par once. La flamme de l' esprit de vin tenant ce sel en dissolution m' a présenté une singularité, qui me paroit mériter beaucoup d' attention, savoir que, sans différer essentiellement de celle de l' esprit de vin pur, elle étoit bordée depuis le bas jusqu' en haut d' une autre flamme, moins lumineuse, & très sensiblement verte.

On sait que le sel sédatif, qui colore aussi en verd la flamme de l' esprit de vin, a quelques proprietés communes avec l' arsenic, telles que la vitrescibilité, le pouvoir

de décompofer le nitre &c. la circonftance donc que je viens d' expofer femble montrer encore une nouvelle conformité entre ces deux fubftances. Je n' ofe cependant la donner ici comme entièrement conftatée, parceque, quoique j' aie tout lieu de croire que l' arfenic ainfi que le nître que j' avois employés pour faire le fel neutre arfénical, dont je me fuis fervi, étoient purs, & exempts du mélange de cuivre; cependant comme il y avoit très longtemps que j' avois fait ce fel, je crois qu' il eft à propos avant de prononcer affirmativement fur ce fait de le vérifier en compofant de nouveau fel neutre arfénical avec toutes les précautions néceffaires pour m' affurer qu' il ne contiendra aucune parcelle de cuivre, & je n' aurois pas manqué de le faire dès à préfent fi le peu de temps qui me reftoit pour achever ce mémoire, me l' eut permis.

A Paris ce 4 juin 1773.

REFLEXIONS

SUR UN ESSAI DE CHIMIE COMPARÉE

PAR M.r LE COMTE DE SALUCES.

Ce feroit paroître débuter par un paradoxe que d'ofer avancer que tout eft grand dans la nature & que tout y peut paroitre d'une petiteffe inconcevable; tant qu'on s'arrete, en effet à examiner la face d'un objet, ou cet objet même de tous les côtés, fans aucun rapport avec d'autres, on ne pourra fe former aucune grande idée; mais lorfque en faififfant les rélations qui peuvent lier le plus petit objet, ou le fait par lui même le plus comun à d'autres, d'où il refulte un affemblage de verités, cet enchainement ne peut à moins de reveiller des idées étenduës & lumineufes; dont l'utilité fera enfuite plus où moins fenfible fuivant l'etendue de ces mêmes raports.

Le premier pas qui fe préfente dans la marche naturelle de l'efprit humain eft celui de comparer les objets entre eux; fi l'on s'en tient toujours aux caractères fenfibles, qui fervent à diftinguer ces objets entr'eux, il doit neceffairement en refulter une monotonie qui refferre nos connoiffances; fi au contraire on fe permet un plus grand nombre de combinaifons, on parviendra non feulement à répandre plus de lumières pour la conduite, & pour le bien de l'homme, mais ce qui intéreffe bien plus encore, on parviendra à fimplifier les méthodes & à approcher par-là toujours plus des routes que tient la nature.

Si un Chimifte ne fçait que fon art, fi un Naturalifte n'étudie que la fienne, fi le Botanifte & le Phificien n'ap-

pliquent chacun qu' à la leur, on n'aura qu'un Erudit, ou un Artiſte plus ou moins ſçavant, & il ne reviendra que des avantages bien peu intéreſſants pour chacune de ces parties, conſiderées en tant que ſciences; c'eſt donc du concours des lumières que toutes les branches de la Philoſophie naturelle peuvent fournir, & ſe prêter qu'on doit attendre des decouvertes utiles aux ſciences, & à la Société: mais en attendant le Génie qui ſache s'elever d'un vol rapde & ſaiſir le fil des vérités éparſes, dont on eſt contraiint de former tant de ſciences à part, nous chercherons à en rapprocher quelques unes qui dépendent de la Chimie, & qui en même tems tirent des ſecours de quelqu'autre partie de la Philoſophie, ou qui en empruntent à leur tour.

I

Les corps ſont ou fluides ou ſolides, ſous ces deux dénominations on peut à la vérité ranger tous les corps de cet Univers, mais elles ne ſuffiſent pas pour nous éclairer d'une manière vraiment Philoſophique.

I I

Les corps ſont ou végétaux, ou animaux, ou enfin foſſiles & minéraux, mais c'eſt encore là une notion bien vague. Diſtinguer tous les corps des trois regnes & noter ceux qui ſont ou fluides ou ſolides, n'eſt pas dire encore aſſez; faire le dénombrement de leurs apparences extérieures & de leur tiſſu interne ſeroit un pas un peu plus avancé, ſi ces apparences & ces tiſſus ſont conſtans. Ajouter les propriétés extrinſeques & intrinſeques de ces mêmes corps ſeroit toujours avancer chemin; ſéparer enfin les parties de ces corps par le feu ou par les menſtrues, les recompoſer & les faire reparoitre dans leur premier état eſt encore un

très-grand pas vers la perfection; mais avec tout ceci, la comparaiſon des produits des parties ainſi ſéparées par la même voye, dans les différents états où ces corps peuvent ſe trouver me paroit offrir un point de vüe trop intéreſſant, pour que le Chimiſte Phyſicien puiſſe negliger d'y apporter la curioſité la plus inſtructive, & toute l'exactitude dont il eſt capable.

I I I

Ce point de vüe je l'avoüe eſt très-vaſte & l'execution en paroitra ſans doute très-difficile: mais ſi l'on reflechit au grand nombre de matériaux que l'on a ſous la main, on verra que les obſtacles ne ſeront pas inſurmontables; nous allons donc commencer par un petit eſſai qui pourra ſervir à mieux développer mes idées, & à en faire naitre à d'autres peut-être de plus générales & de plus lumineuſes.

I V

L'analyſe étant la voye par laquelle on parvient à décompoſer les corps, & à en ſéparer les parties d'une maniere diſtincte, il me paroit que c'eſt elle principalement qui peut nous fournir les données pour la réſolution de cet important probléme, je dis important parcequ'il me paroit tel, & je ne crois rien dire qui doive allarmer l'homme le plus délicat, car c'eſt une vérité aujourd'hui aſſés généralement reconnue que l'analiſe eſt la clef des decouvertes (d'ailleurs je ſuis bien aiſe d'être forcé par la nature du ſujet à dire bien des choſes qui ont été dites de long-tems): mais la définition du terme analyſe ne fournit aucune notion poſitive & préciſe; la diſtinction d'analiſe par le feu en chimie ou d'analyſe par les menſtrues eſt générale mais encore trop vague, la ſéparation des par-

ties des corps par tel moyen que ce ſoit eſt le but qu'on doit ſe propoſer & doit faire l'objet de nos recherches (*).

V

Il eſt de parties qui conſtituent eſſentiellement un corps déterminé & celles-ci ne peuvent être que tout-à-fait ſimples, au moins par raport à nous, & eſſentielles à tel corps, de manière que ſans elles le corps ceſſeroit d'être tel, c'eſt-à-dire de tel genre, & de telle eſpèce: d'autres au contraire ſans fixer neceſſairement la nature du corps ſe trouvent combinées, unies &c. à ces mêmes parties: elles ſont même quelque fois abſolument étrangères, mais elles peuvent cauſer dans certain cas quelque modification à ce corps. (1)

V I

Il eſt donc très-néceſſaire de chercher à découvrir & à diſtinguer autant qu'il eſt poſſible les parties eſſentielles

(*) Il paroitra du premier coûp d'œil qu'il y a ici un abus d'idées ſur le terme d'analyſe, mais la réflexion juſtifiera mon laconiſme.

(1) Pour rendre ma penſée plus clairement il ſuffit de conſidérer, par exemple, qu'il doit néceſſairement ſe trouver des parties aqueuſes, ou pour le dire plus ſimplement de l'eau dans un certain raport déterminé dans toutes les ſubſtances ſalines, ſans quoi ces ſels ceſſeroient d'être tels qu'ils ſont, pendant qu'ils en tiennent une plus grande quantité dans leur criſtalliſation, qu'on peut très-bien leur ôter, ſans qu'ils changent de nature; toute la modification ſe réduiſant alors à leur figure; d'ou il ſuit qu'une partie de l'eau eſt eſſentielle comme nous l'avons dit dans un raport déterminé à une telle eſpéce de ſels, pendant que l'autre partie n'eſt qu'accidentelle quant à la nature, & ne peut être regardée tout au plus que comme une partie intégrante: nous allons raporter encore une exemple pour rendre la choſe plus ſenſible. Monſieur Baumé nous dit dans ſon manuel de Chimie pag. 329 §. 3, que le ſel marin à baſe terreuſe quoique difficile à criſtalliſer, criſtaliſe néanmoins avec celui qui eſt à baſe d'alkali *minéral* & *qu'il* eſt même cauſe qu'on obtient des criſtaux cubiques infiniment plus gros que lorſque le ſel marin eſt *très-pur*: voila donc un exemple qu'il ſe trouve quelque fois dans les corps des parties abſolument étrangéres qui peuvent cependant y cauſer dans certains cas des modifications.

d'un corps, de celles qui ne ſont qu'accidentelles & indifférentes pour ainſi dire à la nature de ce corps, & qui ne contribuent tout au plus qu'à lui faire prendre une forme conſtante : mais ce pas que le raiſonnement porte à faire, eſt ſans contredit de la plus grande difficulté; auſſi n'oſerais-je pas me flater d'y reuſſir toujours, mais pour l'amour de la vérité on me paſſera les reflexions que je ſoumets au jugement des maîtres de l'art.

V I I.

Les circonſtances qui contribuent à altérer un corps de même eſpéce ou nature, ſont celles qu'on ne doit jamais négliger, & peut-être qu'elles ſont les plus propres à nous dévélopper bien des myſtères; mais nous y reviendrons, & nous propoſerons en attendant quelques reflexions préliminaires ſur les caractères généraux qui affectent & qu'on découvre dans les corps.

V I I I.

Il faudra commencer par un des trois regnes, & après avoir choiſi le genre & l'eſpéce conſidérer ce qui arrive à ce corps par le même moyen dans les différents états ou l'on le ſoumet à l'analyſe; remarquer après ce qu'il a de commun, & les differences ſimples ou compoſées qu'on y obſerve; raprocher enſuite ces vérités des opinions ou des idées qu'on a dans la Chimie ſur ces mêmes objets, & rectifier ainſi & enrichir cette ſcience par le plus grand detail poſſible de vérités utiles. Venons au fait.

I X.

Je commencerai donc par les végétaux, & je me contenterai en premier lieu d'examiner *une généralité.* Les

plantes sont ou *saines ou putrefiées* ; je prends les extrêmes, comme les plus propres à marquer les différences ; les états intermédiaires devant participer des deux en raison de leur proximité d'un des extrêmes. Nous allons donc former une table des produits que nous fournit une même plante dans ces deux états par la *distillation*, *l'incineration* & la *lixiviation* : cette méthode me paroissant la plus précise & la plus propre à rapprocher les objets pour en rendre plus sensibles les différences, & les changemens.

Table des résultats qu'on obtient des Plantes saines, & putrefiées par la distillation, l'incinération, & la lixiviation.

PLANTES.

Par la distillation.

	Saines		Putrefiées
1	Phlegme	*etiam*	contenant du sel volatil.
2	Huile noire empireumatique . . .	*etiam*	
3	Acide	o .	Alkali volatil.
4	Huile légère	o .	
*	Beaucoup d'air	o .	
5	Charbon ou *caput mortuum* * . .	*etiam*	
	* qui par *l'Incineration & la lixiviation donne de l'*		
6	Alkali fixe	o .	
7	Terre insipide	*etiam* (a)	

(a) Pour ne pas repeter le produit je me sers de cette abbréviation.

X

Les produits communs sont n.° 1 & 2 dans la distillation & même le 5 si l'on veut, & dans l'incinération & la lixiviation le n.° 7.

X I

Les particuliers aux plantes saines sont les n.° 3, 4 & * dans la distillation, & le n.° 6 par l'incinération, & la lixiviation: produits qu'on n'obtient pas dans les plantes putrefiées.

X I I

Les particuliers enfin aux plantes putrefiées, & qu'on ne rencontre pas dans les autres sont l'alkali volatil: mais cette substance n'existe pas toute formée dans les plantes saines de cette classe, elle est donc vraiment l'ouvrage de la putrefaction; or n'est il pas naturel de penser qu'elle est le résultat des produits qui manquent, savoir des n.^{os} 3, 4, & 6.

1 Voyons maintenant les idées que l'on a sur l'alkali volatil, elles sont ou théoriques, ou tirées des faits.

2 *L'alkali volatil* dit M. Macquer Elem. de Chim. Theor. p. 230 *est composé d'une certaine quantité d'acide combiné, & engagé dans une portion de la terre du mixte dont on le tire, & d'une assés grande quantité de matière grasse ou huileuse &c.*

3 Il n'est pas néceffaire de faire remarquer la conformité qui se trouve entre ces idées, & ce que nous donne l'expérience, nous allons passer maintenant aux différens tours de main que nous proposent plusieurs Auteurs des plus classiques pour volatiliser les alkali fixes, ce qui dans le fond est la même chose que dire de faire des alkalis volatils; ce seroit disputer sur des mots que de ne pas envisager d'une manière générale les expressions, *rendre volatils*, *changer en sels volatils*, *volatiliser &c.* tout bien considéré c'est toujours ajouter la propriété caractéristique de

légéreté à un corps qui ne l'avoit pas, & qui au contraire avoit celle d'être fixe, ainſi nous pourſuivrons notre examen.

4 Wan-Helmont dit qu' en faiſant digérer le ſel de canelle avec ſon huile pendant 3 mois en obtient un alkali volatil par la diſtillation.

5 Starckei prétend qu'en imbibant le ſel de tartre de huile de Thérebentine, on rend ce ſel volatil par la digeſtion.

6 Ludovic aſſure que le ſel de tartre imbibé de ſon huile empireumatique ſe ſublime en ſel volatil à une chaleur médiocre.

7 Stahl nous apprend que ce ſel devient volatil en le combinant aux huiles étherées.

8 Nous obſerverons cependant encore une circoſtance, très importante, à mon avis, ſur ce ſujet, ſavoir que pour ſurmonter la difficulté que les alkalis ont à s'unir aux huiles diſtillées on les combine auparavant avec le vinaigre.

9 L'on recomande enfin la combinaiſon des ſels fixes avec le vinaigre diſtillé le tout uni avec un eſprit urineux pour en tirer un alkali volatil.

10 Si nous reflechiſſons maintenant ſur tous ces procedés nous voyons qu' il ſe rencontre dans tous la combinaiſon des mêmes principes que nous fournit la comparaiſon des analyſes, & qui eſt ſi bien énoncée par l'Illuſtre Monſieur Macquer.

XIII

Toute la fineſſe de l'artiſte conſiſte à fournir le principe qui manque: ce qui ne pourroit pas à la verité être déterminé avec préciſion, pour le raport entre ces mêmes principes, mais qui peut très-bien être aperçu & ſenti par un homme de l'art.

XIV

En effet nous voyons que dans le procédé §. 9 ce n'eſt pas une matière auſſi chargée de phlogiſtique que le ſont

les huiles &c. qu'on préſcrit, mais bien plu-tôt un acide plus développé, & cela parceque les ſels fixes contiennent plus de phlogiſtique que le ſel de tartre, ou tout autre ſel parfaitement alkaliſé.

X V

En effet s'il n'arrivoit pas ce que dit Monſieur Macquer d'après Stahl, que les fermentations devant être régardées comme des acheminemens à la putrefaction, les acides reçoivent alors la plus grande altération qu'ils puiſſent éprouver ſans ceſſer d'être ſels, & que cette métamorphoſe de l'acide conſiſte en ce qu'il s'unit à une portion de l'huile, & de la terre ſubtiliſée du mixte, pour former l'alkali volatil, nous devrions retirer des ſels volatils de tous les ſavons, ce qui n'arrive cependant pas dans les ſavons ordinaires, ainſi qu'on s'en aſſure par la diſtillation.

X V I

Le tartre regeneré, ou pour parler plus exactement la terre foliée de tartre ſemble venir à l'appuy de ce ſentiment; tout le monde ſçait que c'eſt un ſubſtance volatile ſavonneuſe (ſi on ne veut pas lui accorder le nom de ſavon) qui réſulte de la combinaiſon du vinaigre diſtillé avec l'alkali-fixe, & perſonne n'ignore auſſi que cet acide végétal contient encore une grande quantité de matière huileuſe, d'ou il réſulte une combinaiſon de ces principes, dont elle tire la propriété de ſa volatilité, & c'eſt ce qui prouve d'autant mieux l'opinion que nous venons d'expoſer, ſavoir que l'alkali volatil eſt le réſultat de l'union qui ſe fait de l'acide dans un raport déterminé avec une terre ſubtiliſée & des matières graſſes; & quoique nos tables puiſſent ſervir de démonſtration nous allons raporter le ſentiment du célébre Boherave à l'article du tartre régeneré p. 149 *Elem. Chem. Venetiis* 1759 *ap. Seb. Coleti dubitavi ſaepe omnibus hìs conſideratis ſedulo, an non hic eſſet ſal tartari volatilis redditus Helmontianus &c. Quotieſ-*

cumque vero nimia cura ſalem hunc ſolvere depurare, colare, inſpiſſare, calcinare, ſic in album convertere, quis conatur, toties deprehendet, abire in auras, perdique: unde quidem volatilitatem ſic natam diſcit, coeterum oleum perdit, & operam.

XVII

Puiſque nous voyons que les plantes ſaines donnent par la diſtillation des principes que l'on ne trouve plus, au moins ſeparés, dans ces mêmes plantes putrefiées, & que celles-ci fourniſſent un produit qu'on n'obtient pas des premières, ce qui fait un argument aſſés ſolide pour juger que ces principes ſe ſont métamorphoſés en ſe combinant par le mouvement de putrefaction: (2) il me paroit très-convenable de rapprocher ici quelques objets qui ſemblent liés par le même réſultat; nous verrons donc ce qui reſulte de l'Analyſe des plantes ſaines qui fourniſſent beaucoup d'alkali volatil, & nous paſſerons enſuite à faire la comparaiſon des produits que l'on obtient des matières animales qui ſont celles principalement qui en fourniſſent une plus grande quantité.

Cette manière de traiter la Chimie me paroit aſſés méthodique, & propre à donner des idées générales, elle me ſemble au reſte avoir les mêmes avantages que l'anatomie comparée a ſur la ſimple anatomie.

(2) On ne ſeroit pas trop fondé il me paroit à ſuppoſer qu'on ne trouve plus d'acide dans les plantes putrefiées parcequ'on voulut croire qu'il ſe fut diſſipé dans le tems de la fermentation putride; il faudroit alors rendre compte de l'huile, & de l'alkali-fixe auſſi: d'ailleurs il ſe préſente une difficulté à mon avis inſurmontable, ſavoir, ſi on ne veut pas que l'acide, l'huile, & l'alkali fixe ſe ſoient combinés & métamorphoſés en alkali volatil, il faut convenir au moins de la préexiſtance de cet alkali volatil, car d'ou pourroit il venir? mais s'il exiſte tout formé pourquoi ne ſe diſſipetoit-il pas auſſi dans le tems du mouvement de putrefaction, puiſque ſa volatilité eſt bien ſupérieure à celle des acides? ces ſuppoſitions ſont ſi dénuées de probabilité qu'il eſt inutile de s'y arreter plus long-temps.

Table des résultats qu'on obtient des plantes putréfiées qui ne donnoient point d'alkali volatil dans l'état sain & de celles qui en fournissent naturellement sans passer à cet état par les mêmes opérations que les précédentes.

PLANTES.

Putrefiées	Semence de synapi

Par la distillation.

1 Phlegme contenant du sel volatil .	*etiam*
2 Huile noire épaisse & fetide . . .	*etiam*
3 Charbon	*contenant un peu de phosphore.*
4 Sel volatil concret	*etiam*
5 . . . o	*huile légère.*
6 . . . o	*beaucoup d'air.*

XVIII

Il est visible combien ces substances d'une nature totalement différente peuvent se rapprocher du moment que par quelque opération on les améne au point de fournir les mêmes produits & nous observerons que les deux qu'on trouve n.° 5 & 6 dans la semence de synapi & qui ne sont plus dans les végétaux putrefiés quoiqu'ils existassent dans l'état sain, disparoissent précisement par le mouvement de fermentation, d'ailleurs les acides ne paroissent ni dans l'une, ni dans l'autre de ces substances, ce qui est très-intéressant pour l'objet en question; Il est pourtant vrai que le phosphore concourt à prouver qu'il s'y trouvoit de

l'acide: mais c'eſt préciſément ce qui ſert à confirmer que l'alkali volatil eſt l'ouvrage ou de la fermentation putride ou du feu, qui en détruiſant les liens, & l'adhérance entre les parties du mixte rapproche tellement l'acide des parties huileuſes & terreſtres, qu'il en vient un nouveau produit.

Cette théorie qui, je le repete, eſt celle que Monſieur Maquer nous donne dans ſes ouvrages, ſe trouve encore confirmée par les analyſes des matières animales : nous allons nous en occuper maintenant d'une manière également conciſe, c'eſt-à-dire en n'en rapportant que les réſultats en général.

Table des résultats qu'on obtient des végétaux dans leur différens états, ou selon leur nature particulière, & des matières animales; par la distillation, l'incinération, & la lixiviation.

PAR LA DISTILLATION.

MATIÈRES VÉGÉTALES.			MATIÈRES ANIMALES.	
Saines	*putrefiées*	*analogues aux animales*	*sang. de boeuf*	*chair de boeuf*
1 Phlegme	*etiam, contenant du sel volatil*	*etiam*	*etiam*	*etiam*
2 Huile noire épaisse & empireumatique	*etiam, & foetide*	*etiam*	*etiam*	*etiam*
3 Acide	o	o	o	o
4 Huile légère	o	*etiam*	*etiam*	*etiam*
		etiam	*etiam*	*etiam*
5 beaucoup d'air	o	*etiam*	o	o
6 Charbon	*etiam*	*sel volatil etiam*	*etiam*	*etiam*
Le charbon traité par l'incineration, & lixiviation,				
7 Alkali fixe	o	o .. *un peu de phosphore*	o	o .. *un peu de sel marin.*

XIX

Cette table comparative fait voir 1° que de toutes les substances dont on peut retirer de l'alkali volatil soit naturellement soit en faisant essuyer quelque altération au mixte on ne sauroit jamais obtenir ni de l'acide ni de l'alkali-fixe.

XX

2° Que les matières qui ont beſoin de la fermentation putride pour fournir l'alkali volatil ne donnent plus certains produits qu'on obtient cependant des matières où il n'eſt pas néceſſaire d' exciter la putrefaction pour avoir l'alkali volatil, & ces produits ſont principalement l' huile légère ou tenue & l'air; perſonne ne s'etonnera de cette différence en reflechiſſant ſur les effets de la putrefaction: quand à l'air il eſt ſenſible qu' il doit s'echapper dans ce mouvement de déſunion entre les parties des mixtes, & quand à l' huile légère il n'eſt pas hors de probabilité qu'elle ſoit néceſſaire pour métamorphoſer l'acide en alkali volatil dans les ſubſtances ou cette matière ſaline n'eſt pas le produit ou de l'élaboration de la nature ou des altérations qui dependent du feu des artiſtes.

XXI

Cette vérité eſt d'autant plus inconteſtable que dans les ſubſtances animales mêmes, qui ſont celles qui abondent le plus en alkali volatil, il y à des parties dont on n'en tire pas un atome; telles ſont les graiſſes, & au contraire elles donnent une grande quantité d'acide: d'ailleurs ce qu'il y a de plus remarquable c'eſt que les mêmes parties donnent des différences ſi ſenſibles ſuivant qu'elles ont ſouffert, ou non la fermentation putride; nous allons rapprocher encore cet objet d'une manière plus générale dans la table ſuivante.

Table

Table des résultats qu'on obtient, 1.° de toutes les substances qui fournissent naturellement de l'Alkali volatil; 2° de celles qui n'en donnent qu'au moyen de la putréfaction; 3° de celles qui en donnent dans les deux états.

PAR LA DISTILLATION, L'INCINERATION, ET LA LIXIVIATION.

MATIERES

A qui ne fournissent pas de l'Alkali volatil.	B *Végétales* Saines	C *Végétales* Putréfiées.	D *Animales* Saines	E *Animales* Putréfiées
	Qui fournissent toutes de l'Alkali volatil			
1 Flegme	*etiam, sel * * volatil*	*etiam, sel * * volatil*	*etiam*	*etiam, précédé par du sel volatil concret.*
2 Huile empireumatique	*etiam*	*etiam * * & fœtide*	*etiam*	*etiam & fœtide.*
3 Acide	o	o	o	o
4 Huile légère	*un peu*	o	*etiam*	o
5 Beaucoup d'air	*moins*	o	*etiam*	o
6 Alkali fixe par l'incinération & la lixiviation	o	*très peu*	o	o

(Nos. 3–6, E: *ALKALI VOLATIL CONCRET.*)

N.B. Je crois inutile de parler des résidus après toutes les opérations, & je remarquerai seulement que (A) n'a de comun avec (B, D) que les n.° 4, 5 (C, E) avec les n.° 1, 2; & que la différence entre (B, D) & (C, E) consiste dans les n.° 4, 5; ce qui dépend de ce que les unes ont souffert la fermentation putride, & les autres sont dans l'état sain. En effet l'(E) donne du sel volatil avant l'élévation du flegme, d'où il me paroit d'être toujours plus en droit de conclure que l'alkali volatil ne peut être que le produit de n.° 3, 4, & 6 qui, ou ne se montrent point séparément, ou qui disparoissent dans les matières dont on peut tirer ce sel.

XXII

Le ſujet que je viens de traiter ſert à nous montrer qu' il en eſt de ceux, dont il n'eſt pas néceſſaire de ſavoir d'avance le réſultat principal, tel que celui qu'on peut maintenant établir avec plus de confiance, ſavoir que l'alkali volatil conſte d'un acide combiné avec une partie de ce qui deviendroit alkali-fixe par l' incinération, & une partie de la ſubſtance inflammable : car cette ſubſtance ſaline n'exiſtant pas toute formée dans des végétaux ſains, dont on la retire cependant par la putréfaction, ce n'eſt qu'au préjudice de l'acide, de la matière inflammable, & de l'alkali-fixe qu'on peut ſe la procurer ; ce qui me paroit démontré.

XXIII

Nous allons faire maintenant une application du même principe de comparaiſon, qui pourra pour ainſi dire nous fournir un moyen pour vérifier des maximes qui auroient été établies ſur des faits, & je me flatte que cette méthode ne ſera pas jugée tout-à-fait inutile. Je prendrai pour exemple un principe aſſez connu, ſavoir que trois parties de rouge combinées avec trois de bleu & deux de jaune fourniſſent une couleur noire dans la peinture en émail ; & il eſt queſtion de voir ſi ce principe eſt de même applicable à la teinture ; c'eſt ce que nous allons examiner, en ſuppoſant d'avance le fait.

	rouge	. . . .
		de ces deux . . *orangé*
Le noir eſt le réſultat du	*jaune*	de ces deux . . . *violet*
		de ces deux . . . *verd*
	bleu	. . . .

XXIV

L'inspection de cette table présente d'abord l'idée des solutions du problême: car si la maxime est (3) vraye, on pourra former du *noir*, 1° en combinant trois substances simples dont l'une soit *rouge* l'autre *jaune* & la troisième *bleue*, moyenant qu'on observe les proportions qui sont prescrittes, & c'est là la première solution.

XXV

2° On fera du *noir* en mettant une couleur *orangée* avec du *bleu*. La troisième solution nous viendra de la combinaison du *verd* avec le *rouge*. La quatrième sera celle du *violet* avec le *jaune*. Une cinquième enfin naitra de l'assemblage de l'*orangé* du *violet* & du *verd*. Je me bornerai à une de ces solutions pour ne pas surcharger cet essai de détails minutieux. Voici donc comment j'ai fait du noir sur ces principes: j'ai mêlé à une dissolution de vitriol bleu une quantité à peu-près égale de décoction de noix de galle; le mêlange prit d'abord une couleur rouge orangé; j'y ajoutai de la dissolution de cuivre faite par l'esprit volatil, & la liqueur devint peu-à-peu d'un noir trèsfoncé.

XXVI

Tout le monde sait qu'on ne peut pas former de l'encre avec le vitriol de cuivre & la noix de galle; l'expérience m'avoit enseigné qu'en mettant de l'acide dans la décoction de noix de galle on obtenoit un rouge orangé; il ne s'agissoit donc que d'y développer le bleu suivant le 2^d canon de notre analyse; ce qui ayant été fait par le moyen de l'alkali volatil, il en est effectivement résulté du noir

(3) La maxime est certaine dans ce cas, mais je parle comme si elle étoit encore problématique, parcequ'il s'agit de l'appliquer à une nouvelle branche de la physique.

(4); si j'en avois eu le tems, j'aurois de même essayé les autres combinaisons, mais en attendant je ferai observer qu' il est très-aisé de reconnoître aussi dans les encres communes la combinaison de ces trois couleurs; car le bleu lui vient du fer, & l'acide dans la décoction de noix de galle change la couleur jaune en rouge orangé, où le rouge cependant domine, lorsque l'acide y est en assez grande quantité; ce qui est très-conforme à la proportion prescrite.

XXVII

Avant de finir cet essai je rendrai compte encore d'une méthode par laquelle il me semble qu'on peut parvenir à porter quelque perfection dans les arts, & même à les enrichir de quelques nouvelles branches. Je rapporterai pour plus de briéveté la suite de mes idées sur un objet, ce qui servira à faire mieux sentir ma pensée.

Personne n' ignore que l'acide vitriolique a plus d'affinité avec le fer qu'avec le cuivre, ce qui a donné lieu à la prétendue transmutation du fer en cuivre en le plon-

(4) Ce mémoire étoit déja sous la presse lorsque je fis cette expérience avec de la teinture d' *indigo*, mêlée avec celle de bois du bresil, & de celle de pastel ou gaude; en observant à peu-près les mêmes proportions j'ai fait une teinture noire, ou qui paroit du moins telle à l'œil en l'examinant soit à la surface dans un verre, soit dans un flaçon, après l'avoir étendue dans beaucoup d'eau. On objectera, peut-être, que de la combinaison de ces trois couleurs en teinture il ne sauroit résulter un véritable noir sur les étoffes; mais on me permettra d'observer qu' il se passe une très-grande différence dans la teinture appliquée aux étoffes; que parmi les étoffes mêmes il arrive des différences considérables dans l'œil, que prend une même teinture à cause du tissu, du grain, & de différentes autres petites circonstances qui causent des grandes modifications, & par conséquent des variétés bien sensibles C'est pour cette raison aussi que la meilleure encre pour l'écriture n' est d'aucun usage pour la teinture des étoffes. Cela tient à un principe trop connu des physiciens, & dont les données manquent ordinairement à l' artiste même le plus intélligent. J'ai fait de même une teinture noire avec du violet & des jaunes; mais je dois remarquer que dans toutes ces couleurs on est obligé d'augmenter la proportion du bleu.

geant dans des eaux thermales cuivreufes qui fe trouvent en Allemagne. La propriété du cuivre de reprendre fa forme métallique dans cette opération, & en même tems l'art de Damafquiner s'étant préfentées à mon efprit, j'ay imaginé qu'on pourroit très-bien tirer quelque parti de la théorie des affinités pour créér un nouvel art, fi on ne veut pas le regarder, feulement, comme une nouvelle branche ajoutée à l'art de damafquiner.

Dans le cas particulier du fer, & du cuivre, il fuffit de plonger dans de la cire de graveur la pièce de fer dont on découvrira enfuite par le deffein les parties qui doivent paroître en cuivre, on paffera après la pièce ainfi préparée dans une diffolution de vitriol de cuivre, & même on l'y retiendra autant de temps qu' il en faut, pour que l' acide vitriolique, diffolvant une plus grande quantité de fer, puiffe être remplacé par une couche plus forte de parties cuivreufes, fur lefquelles il faudra avoir la précaution de paffer le burin, d'ou il réfultera plus d'éclat, & une plus grande folidité dans le damafquinage en queftion.

Mais pour prendre la chofe plus généralement encore, il fuffira de remplir les conditions fuivantes, favoir: que le métal de la pièce qu'on deftine à être damafquinée ait une plus grande affinité avec le menftrue, que n'en a celui qui y eft en diffolution, & qui eft deftiné au damafquinage. Une autre condition feroit celle que le précipité reparut fous fa forme métallique, mais j'ai lieu de croire qu'on pourroit y fuppléer en foufpoudrant toute la pièce de charbon ou de quelque autre matière inflammable qui put revivifier cette chaux par fon phlogiftique en la paffant fur le feu, s'il le faut.

Cette idée, quelque imparfaite qu'elle foit, pourroit bien un jour être rectifiée & être portée plus loin par le fecours de la doctrine des affinités compofées. J'efpère d'être com-

pris par les gens de l'art ; & ce ſera une nouvelle obligation que nous aurons aux lumiéres que l' Illuſtre Monſieur Macquer a répandu ſur cette partie ſi controverſe, ſi abſtraite, & ſi intéreſſante de la chymie.

CORRECTIONS POUR LA PARTIE PHILOSOPHIQUE

Dans le mémoire de M.r le COMTE MOUROUX.

		Fautes.	*Corrigez.*
Pag.	17.*l.*23.	que on traite	dont on traite
	19.*l.*16.	il est chose	c' est une chose
	24 *l.*19.	ne la visite	ne les visite
	25 *l.* 2.	exosé	exposé
	l. 3.	que pour	que par
	*l.*18.	extremment froid comme en Moscovie, en Pologne	extremement froid comme en Moscovie, & en Pologne
	27.*l.*25.	écloses,	écloses ;
	30.*l.*23.	à l' obscur	dans l' obscurité
	48.*l.*17.	particulierement	particulierement (12
Note(13)	49.*l.*11.	metallium	metallicum
	*l.*12.	fixmm	fixum
	*l.*15.	vivide	viride
	*l.*15.	urtione	ustione
	*l.*17.	vividem	viridem
Note(14)	50.*l.*14.	d'accord l'éspece	d'acord sur l'éspece
	l. 16.	de Chevalier Linné	du Chevalier Linné
Note(16)	51.*l.* 2.	inturfusception	intussusception

In CAROLI ALLIONII auctario stirpium horti Regii Taurinensis.

		Errata.	*Corrige.*
Pag.	55. *l.*22.	moluceae	moluccae
	58. *l.*29.	rambrum	ramosum
	61. *l.* 1.	sesamum indicum *transferendum* sub Ruellia	
	69. *l.* 4.	Siegerbekia	Siegesbeckia
	l. 6.	macrophylla 1	macrophylla 1*
	71. *l.*31.	e	ex

	Errata.		Corrige.
Pag. 73.	*l.* 7.	Succica	Svecica
74.	*l.*26	didymum	bonariense
76.	*l.*17.	Argemene	Argemone
	*l.*13.14	melitotus	melilotus
	*l.*24.	melitotus	melilotus
79.	*l.* 2.	juncea L	juncea L *
	l. 4.	valentina L	valentina L *
84.	*l.*11.	pulcrum	pulchrum
89.	*l.*26.	treliantathemum	helianthemum
91.	*l.*21.	chamaemelis	chamaemelii
92.	Consule numeros 133.134.		
94.	*l.*27.	distiactum	distinctum
96.		polymorphia	polymorpha

In dissertationem JOHANNIS FRANCISCI CIGNA *de respiratione*, ob auctoris tunc graviter aegrotantis absentiam multa irrepserunt menda, quae sic corrigenda.

Pag. 112.	*l.* 1.	variores	*lege*	rariores
113.	*l.* 8.	variori		rariori
	*l.*15.	DAUSTENE		DAOUSTENC
114.	*l.pen.*	puth. funic		pathol. funic.
115.	*l.* 3.	alii		*dele*
	l. 6.	deductum		deductam
116.	*l.*33.	tepidum		tepidam
117.	*l.*13.	circuli		corculi
	*l.*30.	postquum		postquam
118.	*l.* 7.	Attenta		; attenta
	l. 8.	analogum ipsis		analogum in ipsis
	*l.*26.	ipsum auriculam		ipsam auriculam
119.	*l.* 2.	non neque		non aeque
	*l.*10.	vivaparis		viviparis

	Errata.	*Corrige.*
Pag. 120. *l.*17.	quum moleſtiam	eam moleſtiam
*l.*25.	retrigeria	refrigerio
ib.	illum autem	illud autem
*l.*33.	ad patrem ſtimulet	ad partum ſtimulet
*l.*35.	ad ſurgendum	ad ſugendam
121. *l.*26.	quae neque	quae aeque
124. *l.*13.	oſtium	otium
*l.*29.30.	Totus textus curſivo charactere erat exprimendus	
125. *l.ult.*	*nota* v memorata	*nota* y memorata
129. *l.* 5.	(III)	(XXIV) Citationes nempe omnes numerorum hujus & ſequentis capitis mendoſae ſunt, quod ordo numerorum, qui in ſingulis capitibus ab unitate incipere debuiſſet, continuata ſerie productus ſit a principio ad finem.
130. *l.*18.	queunt	queant
131. *l.* 9.	in animalibus, qui	in animalibus, quae
132. l. 6.	neque incerta	aeque incerta
*l.*23.	*not.* b	*not.* f
133.	ultima linea hujus paginae in principium ſequentis notae transferenda	
134. *l.*32.	reſpiratio ſenſibilis	reſpiratio inſenſibilis
135. *l.*21.	ea majori	eo majori
137. *l.*15.	Ut animalia	At animalia
*l.*29.	Rigmannus	Richmannus
141. *l.* 5.	Extingues	Exſtinguens

	Errata.	Corrige.
Pag. 143. *l.*20.	conditum esse	pulmonem conditum esse
*l.*30.	camaleon	chamaeleo
144, *l.*29.	superficia	superficiei
*l.*48.	imo & progressivum (p) intestinum motum	intestinum motum imo & progressivum (p)
146. *l.*12.	fit	fiet
*l.*15.	rariorem aerem	in rariorem aerem
*l.*19.	(IX)	9.°
147. *l.ult.*	*not.* d	*not.* l
149. *l.*21.	aeream	veram
150. *l.*31.	Avagius	Savagius
151. *l.* 9.	hanc quoque	huic quoque
154. *l.* 7.	eumdem majores	eamdem mnjores
156. *l.* 8.	potius quum	potius quam
157. *l.*10.11.	aut favere non obstare	aut favere, aut obstare
*l.*11.12.	aut tam praesentiae	non tam praesentiae
*l.*24.	aër en masse	air en masse
*l.*25.	renovare censet	renovari censet.
l. pen.	observatur coagulari	*observatur coagulari*
159. *l.* 2.	ac si ulla	ac si nulla
l. 3.	opprimerentur	apprimerentur

Ad D. Dana. *De solano melanoceraso.*

170.	omne	omnes
171. *not.* 1.	pertinet ad paginam praecedentem	
not. 2.	Miscel. Taur. &c. legenda post verba *Bot. Prof.*	
177. *l.* 2.	Post alias ad . . . adde	Serviceum opus vulgo dictum

MEMOIRE

Sur differentes questions d' Analyse.

PAR M. LE MARQUIS DE CONDORCET.

ARTICLE I

Réflexions sur la forme des racines des équations déterminées, la réduction & la solution de ces équations.

Cardan & ses disciples ont résolu les équations des 3.^{e}, & 4.^{e} dégrés. Les Algébristes qui leur ont succédé, ont perfectionné leurs solutions, en dévélopant la forme & la nature des racines. Ils ont donné une Théorie profonde sur la formation des équations des tous les dégrés & sur les racines imaginaires; mais malgré les travaux de tant des grands Géométres, l' équation du 5.^{e} dégre est encore à résoudre, & a résisté à leurs efforts. M. Euler qui s'est exercé avec tant de succès sur toutes les questions de l' Analyse, s'est occupé de celle-ci, & y a rapellé l' attention des Géométres qui paroissoient l'avoir tournée sur d'autres objets. M. Bézout, M, Waring, M. le Chevalier de Marguerie, M. de la Grange, M. de Vandermonde ont donné sur cette matière des récherches intéressantes & très-propres à jetter une nouvelle lumière sur cette théorie fondamentale de l' Analyse. C'est à la lecture de leurs ouvrages que je dois les réflexions suivantes qui peut-être ne seront pas absolument inutiles à ceux qui se proposeroient de suivre la même carrière.

I

La ſolution d'une équation du 3.^e dégré, ſe réduit à une équation du ſecond, celle du quatrième à une équation du ſixième, immédiatement réductible au troiſième. M. Bézout a prouvé que l'équation du cinquième ſe réduiſoit à une du 24.^e mais le rabaiſſement de celle-ci à des équations du 4.^e, du 3.^e, & du 2.^e ne ſe préſente pas immédiatement; il faut de longs calculs pour y parvenir, & c'eſt le principal obſtacle qui a rétardé juſqu'ici la ſolution de ces équations.

I I

Les racines d'une équation doivent être des fonctions algébriques & entières des coëfficiens de cette équation, & ſi le dégré eſt n en général, elles ne peuvent contenir de radicaux d'un dégré plus élevé que $\sqrt[n]{.}$ Suppoſons donc que nous ayons une équation du dégré n, où le ſecond terme manque, & faiſons

$$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}; \ldots\ldots$$

le nombre de ces radicaux étant $n - 1$, il eſt clair que ſi je fais diſparoître les radicaux de cette équation *hypothétique*, & qu'enſuite je mette au lieu de x^n ſa valeur tirée de la propoſée, il me reſtera une fonction où x ne montera qu'à la $\overline{n-2}$.^e puiſſance; ce qui me donnera $n - 1$ équations pour déterminer les $n - 1$ quantités A, B, C, &c. On voit que les conditions de cette opération ſont que l'équation propoſée & l'équation hypothétique aient lieu en même temps & *pour toutes les racines*. On voit auſſi que pour faire diſparoître les radicaux de

l' équation $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$, &c. on en aura une où x montera au dégré n^{n-1}, & c' eſt ce qui doit arriver, puiſqu' à cauſe des n racines de l'équation $y^n - 1 = 0$, chaque $\sqrt[n]{A}$ ou $\sqrt[n]{B}$, &c. a n valeurs qui peuvent être combinées avec les n valeurs de chaque autre, & que les radicaux ſont au nombre de $n - 1$.

I I I.

L' équation en A ne pouvant contenir de radicaux, ni du dégré n, ni des dégrés ſupérieurs, ſera néceſſairement du dégré . . . . $m . n - 1 . n - 2 . n - 3 \ldots 1$; m étant le produit des nombres plus petits que n; & comme la quantité que nous appellons A, répond à une quantité qui, en ſuivant la méthode de Tſchirnaus eſt donnée par une équation du dégré $n - 1 . n - 2 . n - 3 \ldots 1$. L'equation en A ſera réductible à une équation du dégré $n - 1 . n - 2 . n - 3 \ldots 1$; en ſorte que ſi on avoit $m = m' . p' . q' \ldots$ on auroit, en réſolvant ſucceſſivement des équations des dégrés m', p', q', ou $m' p'$, $m' q'$ &c. $m' p' q'$ &c. (ſi ces produits ſont moindres que n) on auroit, dis-je, une équation définitive du dégré $n . - 1 . n - 2 \ldots 1$. Toutes les fois que $n > 3$, cette équation monte donc à un dégré plus élevé que n; & c' eſt ce qui a rendu ſi difficile la ſolution des équations des dégrés ſupérieurs.

On voit déja que pour réſoudre l'équation produite par l'équation hypothétique . . . $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$, &c. il y a deux moyens à employer; 1.° la réduction de cette équation; 2.° une nouvelle équation hypothétique. Suppoſons d'abord que l' équation en x' du $n - 1$, $n - 2 \ldots 1$ dégré, ne ſoit

ſuſceptible d' aucune réduction ; il eſt clair que ſi on la traité comme la propoſée, qu'on faſſe $x' = \sqrt[1.2.3...n-1]{A'} + \sqrt[1.2.3...n-1]{B'} + \ldots$ le nombre des radicaux étant $\overline{n-1 \cdot n-2 \ldots 2 \cdot 1} - 1$, on aura une équation pour A'. Mais comme les racines de l'équation en x' ne doivent pas contenir de radicaux plus élevés que $\sqrt[n-1]{}$, on voit que l'équation en A', montera ou ſera réductible à un dégré qui n'aura point de diviſeurs premiers plus grands que $n-2$. En répétant la même opération, & réduiſant toujours ces équations autant qu'elles peuvent l'être, on en aura une d'un dégré qui n'aura point de diviſeurs premiers plus grands que $n-3$ & aînſi de ſuite juſqu' à une équation rationnelle.

I V

Ces ſuppoſitions pour les équations hypothétiques, ſont ſans doute trop compliquées; ainſi il faudra, au lieu de cela, faire ſeulement $x' = \sqrt[n-1]{A'} + \sqrt[n-1]{B'} \ldots + Q'$, le nombre des A', B' étant $n-2$; & on examinera ſi l' équation en A', ou en Q' devient, après être réduite, d'un dégré qui n'ait pas de diviſeurs premiers plus grands que $n-2$. Si cela a lieu, on verra ſi en faiſant dans cette équation réduite dont l' inconnue eſt x''; $x'' = \sqrt[n-2]{A''} + \sqrt[n-2]{B''} \ldots + Q''$, le nombre des radicaux étant $n-3$, & ainſi de ſuite on aura ſucceſſivement des équations dont le dégré n'ait que des facteurs premiers plus petits que $n-3$, $n-4$ &c., & ainſi de ſuite. Nous obſerverons encore que

ſi l'équation réduite en x'' eſt d'un dégré produit par des facteurs premiers plus petits que $n - 1$, & que quelqu'un de ces facteurs ſoit répété plus d'une fois & ſoit en même temps facteur de $n - 1$, il faudra eſſayer auſſi une équation hypothétique

$$x'' = \sqrt[n']{A''} = \sqrt[n'']{B''} \ldots\ldots + Q''$$

où n' eſt ce facteur, & où le nombre des A'' &c. eſt $n - 1$.

V

Pour ſavoir ſi une équation eſt ſuſceptible de réduction, on prendra tous les diviſeurs, tant ſimples, que compoſés de l'expoſant du dégré de l'équation ; & ſoit m un de ces diviſeurs, mm' le dégré de l'équation & x l'inconnue, ou cherchera ſi on ne peut pas avoir.

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \ldots + p = 0,$$

les a, b, &c. étant donnés par des equations du dégré m'.

D'abord on eſſayera les diviſeurs ſimples, & enſuite on verra ſi on a des diviſeurs compoſés qui réuſſiſſent ſans qu'aucun diviſeur ſimple ait reuſſi. Il ſera queſtion de réſoudre d'abord l'équation m ; or dans ce cas quand même $m > n$, il eſt clair que m eſt le produit des diviſeurs premiers plus petits que n; que l'équation $x^m + ax^{m-1} \ldots + p = 0$, ne peut avoir dans ſa racine de radicaux auſſi élévés que n, & qu'ainſi on la réſolvera en prenant des équations hypothétiques comme ci-deſſus.

Il eſt inutile d'avertir que l'on n'a pas beſoin d'avoir réſolu l'équation en m ou m' pour ſavoir ſi la propoſée du dégré $m\,m'$ eſt réductible ou non.

V I

On peut régarder la méthode ci-deſſus comme générale ; en effet il eſt certain que la racine d'une équation du

dégré n ne peut contenir, ſous le radical n, que des fonctions de radicaux moins élévées : or quelles que ſoient ces fonctions, il eſt clair que les équations hypothétiques ci deſſus ſerviront à faire diſparoître à chaque fois le radical ſous qui tous les autres ſe trouvent, & ainſi de ſuite, juſqu' à ce qu'on ait une équation qui ait un diviſeur rationnel. Ainſi l'on voit que la méthode employée pour réſoudre les 3.^{e}, 4.^{e} dégré, peut s'étendre aux dégrés ſupérieurs, & que la difficulté qui nait de l'élévation de l'équation où conduit l'hypothèſe pour la forme des racines, ne tient qu' à l'enorme complication des calculs qu' exige alors la ſolution du probléme ; mais qu'on parviendra toujours à la ſolution cherchée en employant ſucceſſivement les réductions, & les équations hypothétiques, quand il n'y a plus de réductions poſſibles.

VII

Les équations que produiſent les différentes hypothèſes qu'on peut faire pour avoir les racines d'une propoſée, ne peuvent contenir dans leurs racines que les mêmes radicaux, mais combinés différemment avec des coëfficiens numériques, qui feront en général les racines d'équations $y^n - 1 = 0$, $y^m - A = 0$, A étant un nombre, $m < n$, ou d'équations produites par la multiplication de celles ci. On pourra donc abréger conſidérablement le calcul, en ne cherchant, ſoit pour la réduction des équations, ſoit pour les réſultats où conduiſent les équations hypothétiques que des fonctions rationnelles, par raport aux coëfficiens indéterminés de la propoſée, ſans s'embaraſſer des coëfficiens numériques. Si on joint à cela une remarque qu'on doit à M. le Chevalier de Marguerie, que ſi on a une équation $x^n + a\,x^{n-1} + b^2\,x^{n-2} \ldots . + q^n = 0$, les racines feront des fonctions homogenes & du dégré 1 de ces

coëfficiens ; & que par ce moyen on ſache par le ſeul dégré de chaque équation de quels termes de ces coëfficiens chacun des ſiens peut-être compoſé : l' examen des équations qu'on cherche à réduire, ou pour leſquels on cherche des équations hypothétiques, en deviendra bien moins long.

VIII

J'ai dit ci-deſſus que les coëfficiens numériques dependroient d'équations $y^n - 1 = 0$, $y^m - A = 0$, ou de leurs combinaiſons ; mais quand cela n'auroit pas lieu en général, la recherche de ces coëfficiens n'auroit aucune difficulté analytique. En effet, ſi l'on connoît une fois les fonctions des coëfficiens indéterminés d'une équation du dégré n qui entrent dans ſa racine, ainſi que toutes les équations qui ont ſervi à déterminer ces fonctions ; comme les nombres inconnus reſtent conſtans, quelles que ſoient les racines, il y aura toujours moyen de les avoir par la méthode des coëfficiens indeterminés.

ARTICLE II

Démonſtration d'un Theorème de M. de la Grange (mémoires de l'Académie de Berlin, tome 24.^e)

Soit l'équation

$$y - x + \varphi x = 0;$$

φx déſignant une fonction quelconque de x, & que je cherche une valeur de ψx, autre fonction de x en y ; j'aurai par le théorème de M. d'Alembert,

$$\psi x = \psi y + \frac{d\psi y}{dy} \varphi x + \frac{d^2 \psi y}{2\, d y^2} \varphi x^2 + \&c.$$

par le même théorème

$$\varphi x = \varphi y + \frac{d\varphi y}{dy}\varphi x + \frac{d^2\varphi y}{2dy^2}\varphi x^2 + \&c.$$

donc faisant $\varphi x = \varphi y + B$, $B = \frac{d\varphi y}{dy}\varphi y + C$, & ainsi de suite : j'ai en ordonnant par raport aux puissances de φy & de ses différences,

$$\varphi x = \varphi y + \frac{d\overline{\varphi y}^2}{2dy} + \frac{d^2\overline{\varphi y}^3}{2.3.dy^2} + \&c.$$

$$\frac{\varphi x^2}{2} = \frac{\varphi y^2}{2} + \frac{2d\overline{\varphi y}^3}{2.3.dy} + \frac{3d^2\overline{\varphi y}^4}{2.3.4dy^2} + \&c.$$

$$\frac{\varphi x^3}{2.3} + \frac{\varphi y^3}{2.3} + \frac{3d\varphi y^4}{2.3.4dy} + \frac{6d^2\varphi y^5}{2.3.4.5.dy^2}\ \&c.$$

substituant donc ces valeurs dans celle de ψx, ou aura, en ordonnant par raport aux puissances de ψy, & φy & de leurs différences,

$$\psi x = \psi y + \varphi y\frac{d\psi y}{dy} + \frac{\varphi y^2 d^2\psi y}{2dy^2} + \frac{\varphi y^3}{2.3}\frac{d^3\psi y}{dy^3}\ \&c.$$
$$+ \varphi y\frac{d\varphi y}{dy}\frac{d\psi y}{dy} + \frac{2.d.\varphi y^3}{2.3dy}\frac{d^2\psi y}{dy^2}$$
$$+ \frac{d^2\varphi y^3}{2.3dy^2}\frac{d\psi y}{dy}$$

& réduisant

$$\psi x = \psi y + \varphi y\frac{d\psi y}{dy} + \frac{d\varphi y^2\frac{d\psi y}{dy}}{2dy} + \frac{d^2\varphi y^3\frac{d\psi y}{dy}}{2.3dy^2}\ \&c.$$

formule dont la loi est facile à saisir.

AR-

ARTICLE III.

Sur une équation aux différences finies.

Soit $z = A F x + a y + B F' x + b y + C F'' x + c y + D F''' x + e y$ &c. l'intégrale d'une équation aux différences partielles où les F désignent des fonctions arbitraires & où A, B, C, D, &c. sont des fonctions de y. Je suppose que lorsque $z = f$, $y = f'$: que lorsque $z = g$, $y = g'$; que lorsque $z = h$, $y = h'$; que lorsque $z = l$, $y = l'$, & ainsi de suite. On aura donc pour déterminer les fonctions, les équations.

$$f - A F \overline{x + a f'} - B F' \overline{x + b f'} - C F'' \overline{x + c f'} - D F''' \overline{x + e f'} \pm \&c = 0$$

$$h - A' F \overline{x + a h'} - B' F' \overline{x + b h'} - C' F'' \overline{x + c h'} - D' F''' \overline{x + e h'} \pm \&c = 0$$

$$g - A'' F \overline{x + a g'} - B'' F' \overline{x + b g'} - C'' F'' \overline{x + c g'} - D'' F''' \overline{x + e g'} \pm \&c = 0$$

$$l - A''' F \overline{x + a l'} - B''' F' \overline{x + b l'} - C''' F'' \overline{x + c l'} D''' F''' \overline{x + e l'} \pm \&c = 0$$

& ainsi de suite ; les $A A'$ & $B B'$ &c. étant ce que deviennent les coëfficiens en y, lorsque y est égal à f', ou g', ou l'.

Maintenant pour avoir chaque fonction arbitraire, on mettra dans toutes les équations, hors la première, au lieu de x, $x + p$, $x + q$, $x + r$, &c., & on déterminera p, q, r par la condition que $a f' = p + a h' = q + a g' = r + a l'$, & ainsi de suite. Par ce moyen, si le nombre des fonctions est n, on aura après avoir éliminé F, $n - 1$ équations qui contiendront chacune deux fonctions de la forme $F' x$, $F' x + P$ pour la première équation, $F' x$, $F x + P'$ pour la seconde, $F x'$, $F x + P''$ pour la troisième, & ainsi de suite avec deux fonctions F'', deux fonctions F^{v}, &c. Je prends les deux premières équations, & j'ai, en mettant dans la première $x + P'$ au

lieu de x, & dans la seconde $x+P$ au lieu de x, quatre équations qui contiennent $F'x$, $Fx+P$, $F'x+P'$, $F'x+P+P'$; donc je puis éliminer $F'x$: j'aurai maintenant $n-2$ équations qui contiendront chacune $F''x$, & quatre fonctions semblables de x, plus quatre constantes différentes, & de même $F'''x+Q$ & quatre autres fonctions semblables de x, plus quatre constantes différentes; On éliminera F'' par une méthode semblable, & ainsi de suite; en effet quelque soit le nombre des fonctions F^n, pourvu qu'on ait deux équations, on parviendra toujours à éliminer, parce que lorsqu'on aura chassé une de ces fonctions $F^n x+Q$; par exemple, on n'aura qu'à mettre $x+Q$ au lieu de x dans l'équation d'où on a chassé $F^n x+Q$, on aura une équation contenant $F^n x+Q$, $F^n x+Q+Q'$, $F^n x+Q+Q''$, &c., & mettant dans celle-ci pour $F^n x+Q$ sa valeur tirée d'une des deux proposées, on aura une équation en $F^n x+Q'$, $F^n x+Q''$, $F^n x+Q'+Q''$, $F^n x+2Q'$, $F^n x+2Q''$, &c. donc on aura deux équations qui ne contiendront plus $F^n x+Q$, on chassera de même $F^n x+Q'$, & $F^n x+2Q'$, & ainsi de suite. Cela posé, soit une équation définitive de la forme $A, Fx+B, Fx+\Delta^{\text{I}}+C\,Fx+\Delta^{\text{II}}+D, Fx+\Delta^{\text{III}}$ au nombre de m, & qu'on fasse $Fx=Ne^{fx}$, on aura l'équation.

$$A,+B,e^{f\Delta\text{I}}+Ce^{f\Delta\text{II}}+De^{f\Delta\text{III}}\ \&c.=0;$$

& il est clair que l'on aura Fx égal à une série d'autant de termes en Ne^{fx}, que f peut avoir de valeurs.

Examinant cette équation, on voit que si les Δ sont tous commensurables entr'eux, l'équation est comme celles aux différences finies ordinaires; mais si les Δ ne sont pas commensurables, alors on observera 1.° que si m est le nombre des fonctions, il pourra arriver que f ait $m-1$ valeurs réelles. En effet, supposant à f $m-1$ valeurs réel-

les à volonté, & ſubſtituant, on aura les A, B, C, &c. en f; ou peut de même avoir $f = \pm f' \sqrt{-1}$ tant de fois que $\frac{m-1}{2}$ contient d' unités. En effet, en mettant les imaginaires ſous la forme $a + b\sqrt{-1}$, la première ſuppoſition donne $A + B\sqrt{-1} = 0$; la ſeconde $A - B\sqrt{-1} = 0$; ce qui ne fait que deux conditions A & $B = 0$. comme c'eſt réellement e^f qui entre dans l'équation ci-deſſus, C étant la valeur de e^f, on aura d'autres valeurs de f en auſſi grand nombre que $e^f - C = 0$ a de racines, c'eſt-à-dire, un nombre infini. Mais il ne ſuit pas de là qu'il y ait ici un nombre infini de termes correſpondans à chaque valeur de e^f. En effet, la ſuite de toutes ces valeurs de f, eſt f, $f + \gamma$, $f + \gamma'$, $f + \gamma''$, &c. γ, γ' γ'', &c. étant des quantités telles que $e^\gamma = e^{\gamma'} \ldots = 1$; mais dans le cas de l'équation préſente, en mettant ces valeurs pour f, ou auroit A, $+ B\, e^{f\Delta}\, e^{\gamma\Delta} + C\, e^{f\Delta'}\, e^{\gamma\Delta'}$, &c. $= 0$, équation qui doit avoir lieu en même temps que A, $+ B\, e^{f\Delta} + C\, e^{f\Delta'}$ &c. ce qui demande que $e^{\gamma\Delta} + e^{\gamma\Delta'}$ ſoient égaux à l'unité. Or quoique $e^\gamma = 1$, quelque valeurs de γ qu'on eût priſe, cependant lorſque Δ, Δ' ne ſont pas des nombres entiers, $\gamma = 0$ eſt la ſeule des valeurs de γ, pour laquelle $e^{\gamma\Delta}$ ſoit égal à l'unité; or, ici, les quantités Δ, Δ' étant incommenſurables entr'elles, on voit que $\gamma = 0$ eſt la ſeule valeur qui convienne au problême.

ADDITION AU MEMOIRE

Sur les ſolutions particulières des équations différentielles.

PAR M. LE MARQUIS DE CONDORCET.

M. Euler a remarqué le premier qu'il y avoit des équations qui ſatisfaiſaient à une équation différentielle ſans cependant être compriſes dans ſon intégrale générale. Voici quelques reflexions ſur la cauſe de ce paradoxe, c'eſt ainſi que M. Euler l' a apellé.

1 Soit $A\,d\,Z + B\,Z^m = 0$ une équation différentielle, il eſt clair que $Z = 0$ y ſatisfera, mais l'équation ſous cette forme eſt égale à la differentielle exacte de l' intégrale multipliée par un facteur, donc il peut arriver que $Z = 0$ ſatisfaſſe à la propoſée ſans ſatisfaire à la différentielle exacte de ſon intégrale, il ſuffit pour cela qu'elle ſatisfaſſe au facteur, & que Z y ſoit à une puiſſance poſitive plus grande que la plus petite puiſſance de Z dans le dénominateur de la différentielle exacte.

2 Une équation intégrale étant ſuppoſée $Q + C = 0$ ou C eſt une conſtante arbitraire les équations, qui rendent $Q = 0$, ou $Q = \infty$ ſatisfont également à $Q + C = 0$ les unes répondant à l' hypothéſe de $C = 0$ & les autres à celle de $C = -\infty$ donc pour que la ſolution $Z = 0$ ſatisfaſſe à la propoſée ſans ſatisfaire à l' intégrale, il faut que non ſeulement elle multiplie le facteur ſans ſatisfaire à la différentielle exacte, mais qu'elle ne puiſſe pas rendre l'intégrale infinie.

3 Soit $\frac{Z^n}{V}$ le facteur, l'intégrale ſera $S\,A\,V\,Z^{-n}\,d\,Z + B\,Z^{m-n}$ & elle eſt égale à $S\,A\,V\,Z^{-n}\,d\,Z$ priſe en

regardant Z ſeulement come variable plus au terme indépendant de Z il faudra donc ici que $\int A V Z^{-n} d Z$ priſe par rapport à Z ne ſoit point infini lorſque $Z = 0$ donc (come M. Euler l'a enſeigné dans le chapitre de ſon calcul intégral ou il traite de ces ſolutions particulières) il faut que n ſoit entre o & l'unité, mais il faut auſſi que $B Z^{m-n}$ ait un terme ſans Z ſans quoi Z ſe trouveroit à tous les termes de l' intégrale, ce qui eſt contre l'hypothéſe donc $m = n$ donc m eſt entre zero & l' unité.

4 Donc ſi on a une équation différentielle d'un ordre quelconque elle ne pourra avoir des ſolutions particulières non compriſes dans l' intégrale, à moins qu'elle ne renferme des radicaux $\sqrt[n]{Z}$ *, & que ces radicaux ne s' y trouvent pas multipliés à tous les termes par des puiſſances de Z; & les radicaux qui ſeront dans le cas & qui réſolveront la propoſée doneront les ſolutions particulières.

5 Soit l'équation $A d Z + \overline{B d x + C d y} Z^m = 0$ à laquelle $Z = 0$ ſatisfait & que cette équation n'ait pas d'intégrale générale, il eſt clair que toutes les fois que m n' eſt pas entre zero & l'unité $Z = 0$ ſatisfait à l'équation de condition connue pour l' intégrabilité de ces équations, & que lorſque m eſt entre zero & l'unité $Z = 0$ n' y ſatisfait pas; donc on pourra avoir dans ce cas pour ſolutions particulières de la propoſée non ſeulement l'équation de condition, mais encore les quantités qui ſe trouveront dans la propoſée ſous le ſigne radical avec la même condition que ci-deſſus, & il ſera facile d'appliquer le même raiſonement aux équations de tous les ordres pour leſquelles j'ai donné les équations de condition.

6 M. Euler a remarqué dans les mémoires de Peterſbourg où il recherche la courbe que décrit un point attiré par deux centres fixes que ces ſolutions particulières

non comprifes dans l'équation générale ne pouvaient être emploïées à la folution des problêmes. Ainfi lorfque l'on a fu par des fubftitutions ou autrement qu'une certaine équation fatisfait à une équation différentielle, il faut avant de l'employer, examiner fi elle n'eft pas dans le cas de nos folutions particulières ($C' \cdot a\, d$), fi la fonction égalée à zero dans cette équation ne fe trouve pas dans la propofée fous le figne radical avec la condition ci-deffus.

7 La caufe de ce nouveau paradoxe remarqué encore par M. Euler fe peut découvrir en éxaminant la maniére dont pour chaque problême on parvient à une équation différentielle; en effet on verra qu'elles font formées par la comparaifon des valeurs fucceffives des y, des x, & en forte que fi au lieu de $y + dy$ on mettait y, & x au lieu de $x + dx$ elles doivent démeurer identiques, or il eft aifé de voir que fi dans $A\,dZ + \sqrt{Z}\,B = A\,\overline{Z + dZ} - A\,Z + \sqrt{Z}\,B$ on met Z au lieu de $Z + dZ$ elle ne devient pas identique.

8 On voit que dans le cas de $A\,dZ + B\,Z = 0$ la même fubftitution ne rend pas la propofée identique, auffi $Z = 0$ n'eft pas même dans ce cas une véritable folution de la propofée, elle ne peut l'être que dans le cas particulier où elle fe trouve être la même que ce que devient alors la folution générale. En effet foit une équation $a\,y + b\,x^2 - b\,c^2 = 0$, a étant arbitraire, on ne peut-pas dire que l'équation $x = C$ foit une folution de cette équation, puifqu'il y a une infinité de cas ou elle ne refout pas, & fi on avoit eu l'équation $\frac{d \cdot b\,x^2 + b\,c^2}{y} = 0$ on n'aurait pas pu dire que $x = b$ refout le problême qui a conduit à cette équation par ce qu'il y a une infinité de cas du problême qu'elle ne peut réfoudre. Ainfi les folutions contenues dans l'intégrale refolvent non pas le problême

propoſé, mais quelques cas de ce problême, & les autres ſolutions de l' équation différentielle non contenues dans l'intégrale n'en réſolvent aucun.

10 Dans le cas des équations abſurdes on trouvera que ſi (ces équations étant entre x, y & z) on cherche les valeurs de z repondant à $y = X$, X eſt une fonction de x. Les ſolutions de la propoſée contenues dans l'équation de condition deviendront en y mettant X pour y des ſolutions contenues dans l' intégrale de l'équation en z & x. Au lieu que celles qui ne ſeront pas contenues dans l'équation de condition ne donneront pas non plus de ſolutions contenues dans l' intégrale de l'équation en z & x.

Je ne me ſuis point étendû ſur ce ſujet par ce que je ſçai que M. de la Place de l'Académie des Sciences de Paris en a fait l'objet d'un travail conſidérable, ſon ouvrage qu'il a eû la bonté de me communiquer en manuſcrit, il y a plus d'un an, ſera imprimé dans les mémoires de l' Académie des Sciences de Paris pour l'année 1773.

MÉMOIRE

Sur la détermination des fonctions arbitraires dans les intégrales de quelques équations aux différences partielles.

PAR M.[r] MONGE.

L'intégrale d'une équation aux différences ordinaires doit, comme on sait, renfermer, pour être complete, autant de costantes arbitraires que le dégré de la différentielle contenoit d'unités avant l'intégration, & ces constantes doivent être telles que l'intégrale satisfasse à autant de conditions particulières, qui sont ordinairement que pour certaines valeurs données de x, certaines fonctions de x deviennent égales à des quantités données; & en supposant la perfection de l'analyse, la détermination de ces constantes n'est soumise à aucune difficulté. De même l'intégrale complete d'une équation aux différences partielles renferme autant de fonctions arbitraires des variables déterminées que le dégré de la différentielle contenoit d'unités, & ces fonctions doivent être de telle forme que l'intégrale satisfasse à un même nombre de conditions particulieres, qui font toujours que, pour certaines équations données entre x & y, l'intégrale se transforme en d'autres équations données entre x & z.

Par exemple, z étant une quantité fonction de x & de y, δ le caractère de sa différentielle en ne fesant varier que x & d celui de sa différentielle par raport à y, l'intégrale $z = \varphi\ (ax - y)$ de l'équation $\frac{\delta z}{dx} + a\frac{dz}{dy} = 0$, appartient à autant de surfaces courbes distinctes, & dans cha-

chacune des quelles on aura également $\frac{\delta z}{dy} + a\frac{dz}{dy} = 0$,
que φ, peut avoir de formes différentes, & si l'on veut avoir l'équation de celle de ces surfaces qui passe par une courbe à double courbure donnée, il faut déterminer quelle forme doit avoir la fonction φ pour qu'en fesant $y = \Delta \cdot x$, on ait $z = \psi \cdot x$: ces deux dernières équations étant celles des projections de la courbe donnée sur deux des plans aux quels est rapportée l'équation de la surface.

Pareillement $z = \varphi(ax - y) + x\varphi'(ax - y)$, intégrale de $\frac{\delta\delta z}{dx^2} + \frac{2a\delta dz}{dxdy} + \frac{a^2 ddz}{dy^2} = 0$ est l'équation d'autant de surfaces différentes qu'il y a d'unités dans le nombre des combinaisons deux à deux dont sont susceptibles toutes les formes que peuvent avoir les fonctions q & φ'; & l'on ne peut indiquer une de ces surfaces qu'en assignant, par exemple, deux courbes à double courbure par lesquelles elle doive passer: ou plus généralement, qu'en donnant deux conditions distinctes aux quelles il faille que l'équation satisfasse en même tems. Il en est de même des équations qui contiennent un plus grand nombre de fonctions arbitraires.

De plus il arrive souvent, surtout lorsque les fonctions arbitraires sont affectées de facteurs, que la détermination des formes des fonctions introduise dans l'intégrale des constantes arbitraires que l'on ne peut déterminer qu'en connoissant les valeurs de z qui correspondent à des valeurs données de x & de y, ou, ce qui révient au même, qu'en assignant dans l'espace un même nombre de points par lesquels la surface doive passer. Jusqu'ici j'ai supposé que les conditions, aux quelles devoit satisfaire l'intégrale, étoient de nature à être exprimées analytiquement, mais si ces conditions étoient que la surface dût passer par des courbes discontinuës ou tracées au hazard, les formes des

fonctions ne feroient plus analytiques & feroient par conféquent inaffignables neanmoins, comme je l'ai fait voir dans un mémoire précédent, l'intégrale n'en feroit pas moins conftructible.

Ainfi lors qu'on a intégré une équation en différences partielles, l'intégrale qui donne en quantités finies la valeur de z, eft vague, par ce qu'elle renferme des fonctions aux quelles on peut donner toutes fortes de formes, analytiques ou difcontinuës, il faut donc déterminer quelles doivent être les formes chacune en particulier, pour que l'intégrale rempliffe les conditions particulières de la queftion, lorfque ces conditions font analytiques, ou conftruire l'intégrale lors qu'elles font difcontinuës.

Cette opération eft généralement fujette à des grandes difficultés, dont les célébres géometres M.M. D'Alembert, Euler, & La-Grange n'ont encore lévé qu'un très-petit nombre. Je ne crois pas même que nous foïons bientôt en état de les lever toutes; néantmoins, perfuadé que dans les matières nouvelles les moindres progrez ne font pas à négliger, & qu'une idée ftérile entre les mains d'un homme ordinaire peut dévenir très-profitable entre celles d'un habile géometre, je vais faire part à l'Académie du réfultat de mes récherches fur cet objet; trop heureux fi ce mémoire pouvoit être l'occafion de quelques découvertes utiles dans l'analyfe ou dans la géométrie.

1.° Quelque foit la condition à laquelle doive fatisfaire une intégrale, je donne toujours la valeur déterminée de z lorfqu'elle ne contient qu'une feule fonction arbitraire, ou j'en donne la conftruction lorfque la condition n'eft pas analytique. 2.° S'il y a plus d'une fonction dans l'équation, je ne les détermine & ne les conftruis que dans certains cas, c'eft-à-dire, que pour certaines conditions, qui font cependant affez étendues, & que l'on peut fuppofer continuës ou difcontinuës. Ainfi chaque problême dans le

mémoire à d'abord une ſolution analytique, & une conſtruction appliquable aux fonctions diſcontinuës, & par ce que cette conſtruction eſt indépendante de la ſolution précédente, j'en déduis une ſéconde ſolution analytique, qui donne toujours le même réſultat que la première, par conſéquent chaque problême eſt une nouvelle preuve de la poſſibilité de conſtruire les fonctions arbitraires diſcontinuës.

Pour donner plus de généralité aux ſolutions, je ſuppoſe la perfection de l'analyſe, c'eſt-à-dire qu'étant donnée une équation quelconque en x & y on puiſſe toujours en tirer la valeur de x en y, ou celle de y en x, ou pour mieux dire, que quelque ſoit la forme connuë de la fonction ψ, on puiſſe toujours tirer la valeur de x en y de l'équation $\psi\, x = y$, & que les fonctions arbitraires ne ſoient envelopées ſous aucun ſigne d'intégration.

PROBLÊME I

Trouver quelle doit être la forme de la fonction φ dans l'équation $z = \varphi\, V$, pour qu'en feſant $y = \Delta \cdot x$ on ait $z = \Psi \cdot x$; V étant une quantité quelconque donnée en x & y, & les formes des fonctions Δ & Ψ étant connuës.

N.B. J'ai déjà donné la ſolution de ce problême dans un mémoire qui a précédé celui-ci, mais pour ſuivre un certain ordre, je ſuis obligé de le rémetre ici, où l'énoncé eſt d'ailleurs plus général.

Solution.

Soit miſe dans V la valeur de $y = \Delta \cdot x$, & ſoit V' la fonction de x que donne cette ſubſtitution, il eſt évident que l'on aura par la condition de la queſtion $\Psi \cdot x = \varphi\, V'$. Soit fait maintenant $V' = u$, d'où l'on tirera la valeur de x en u, que je répréſente par $f \cdot u$, & ſoit miſe cette

valeur dans $\Psi \cdot x = \varphi V'$, on aura $\Psi \cdot (f \cdot u) = \varphi u$. Or on connoit les formes des fonctions Ψ & f, on connoitra par conséquent celle de la fonction φ. Donc $z = \Psi (fV)$ sera l'équation demandée. C. Q. F. T.

Exemple.

Soit proposé de trouver la forme de la fonction φ, pour qu'en fesant $y = mx$, dans l'équation $z = \varphi (x^2 + y^2)$, on ait $z = \frac{x^2}{a}$.

Il est clair que si l'on met à la place de y dans cette équation sa valeur mx, elle deviendra $\frac{x^2}{a} = \varphi (x^2 + m^2 x^2)$, puis qu'alors la valeur de z doit être $= \frac{x^2}{a}$. Soit fait maintenant $x^2 + m^2 x^2 = u$, ce qui donne $x^2 = \frac{u}{m^2 + 1}$, & soit substituée cette valeur de x dans la dernière équation, on aura $\frac{u}{(m^2 + 1) a} = \varphi u$, ce qui fera connoitre la forme de la fonction φ; d'où il suit que l'équation qui satisfera à la question sera $z = \frac{x^2 + y^2}{(m^2 + 1) a}$.

En effet si l'on met à la place de y dans cette équation sa valeur mx, on trouve $z = \frac{x^2}{a}$.

Remarque I.

L'équation $z = \varphi (x^2 + y^2)$ est celle de toutes les surfaces des révolutions, l'origine des coordonnées rectangulaires étant dans l'axe, ainsi $z = \frac{x^2 + y^2}{(m^2 + 1) a}$ est l'équa-

tion de la ſurface qu'engendreroit la courbe dont les projeƈtions ont pour équation $z = \frac{x^2}{a}$ & $y = m x$, en tournant autour d'un axe parallele aux z & mené par l'origine & parce que cette courbe eſt une parabole dont le plan paſſe par l'axe, il s'enſuit que l'équation $z = \frac{x^2 + y^2}{(m^2 + 1) a}$ eſt celle de la ſurface d'un paraboloïde. J'ai choiſi cet exemple parceque la ſurface en eſt connuë, & que les opérations en ſont ſimples.

Rémarque II

L'opération précédente ſuppoſe que les fonƈtions Δ & Ψ ſont analytiques, c'eſt-à-dire ſoumiſes à la loi de continuité, mais ſi $y = \Delta \cdot x$ & $z = \Psi \cdot x$ répreſentoient les équations des courbes diſcontinuës & tracées au hazard, la forme de la fonƈtion φ ſeroit inaſſignable, on pourroit nèantmoins la conſtruire, comme on va le voir, ou, ce qui révient au même, conſtruire la valeur, que donne alors pour z l'équation $z = \varphi\, V$, x & y étant donnés à volonté.

Conſtruƈtion.

Soient CAD le plan des x & y, que pour la commodité je ſuppoſerai toujours horiſontal dans la ſuite, BAC celui des x & z, $s\,m\,S$ la courbe à double courbure, diſcontinue, ou tracée au hazard & dont les projeƈtions $r\,\varsigma\,R$ & $s\,m'\,S'$ ont pour ſymboles d'équations $y = \Delta \cdot x$ & $z = \Psi\, x$; ſoient enfin AP & PQ les deux coordonnées x & y priſes à volonté, pour leſquelles il s'agit de trouver la verticale $QM = z$. Cela poſé par le point Q on conſtruira ſur le plan horiſontal la courbe TQq dont Planche I FIG. I

l'équation eſt $V = b$, b ètant une indéterminée telle que la courbe paſſe par le point Q; elle coupera la courbe rqR en un point q par lequel on élevera la verticale qm, qu'on prolongera juſqu' à ce qu'elle rencontre quelque part la courbe smS en un point m, on fera $QM = qm$, & le point M ſera dans la ſurface demandée. Car ſi dans l'équation $z = \varphi V$ on fait $V = b$, on a $z =$ conſt. c'eſt-à-dire que toutes les verticales élévées par les points de la courbe TQq doivent rencontrer la ſurface à la même hauteur; mais cette conſtante doit être telle que pour le point q l'on ait $z = qm$, donc on doit avoir $QM = qm$. *C. Q. F. T & D.*

Si par la courbe TQq on imagine une ſurface cylindrique verticale, elle coupera la ſurface à conſtruire (ſuppoſée pour un inſtant conſtruite) en une courbe Mm, qui ſera horiſontale, qui paſſera par le point démandé M & dont la projection verticale ſera une droite horiſontale $M'm'$. Donc ayant abaiſſé qp perpendiculaire aux x, & élévé la verticale pm', le point m', où elle coupera la courbe $sm'S'$, ſera la projection verticale du point m, & l'horiſontale $m'M'$ la projection de la courbe Mm; par conſéquent ſi l'on éléve la verticale PM', le point M' ſera celle du point M, & l'on aura $PM' = QM$. Cette méthode eſt plus commode, par ce qu'elle n'exige pas qu'on éléve la verticale qm dans l'éſpace.

Cette conſtruction eſt générale, mais dans un grand nombre de cas il peût être plus ſimple de lui ſubſtituer un mouvement continu en voici des exemples.

1.° Si l'on a $V = ax - y$, on engendrera la ſurface en feſant gliſſer une droite horiſontale parallelement à elle même, ſur la courbe smS, par ce que dans ce cas là la ligne TQq, pour quelque point Q que ce ſoit, eſt une droite qui fait un angle conſtant avec l'axe AP.

2.° Si l'on a $V = x^2 + y^2$, la ſurface ſe forme par la révolution de la courbe $s\,m\,S$ au tour de la verticale AB priſe pour axe, car alors la courbe TQq pour quelque point Q que ce ſoit, eſt la circonférence d'un cercle dont le centre eſt au point A; c'eſt ce que j'ai déjà démontré dans le mémoire précédent.

AUTRE SOLUTION DU MEME PROBLÊME

Tirée de la conſtruction précédente.

Soient $AP = x'$ & $PQ = y'$, il eſt évident que la queſtion conſiſte à trouver une valeur de z en x' & y' qui ſatisfaſſe aux conditions. Pour cela ſoit fait $V = b$, & ſoit déterminée la conſtante b de telle manière qu'en feſant dans cette équation $x = x'$, on ait $y = y'$; ſoit éliminée y des deux équations $V = b$ & $y = \Delta \cdot x$, ce qui donnera une valeur de x en x', y' & conſtantes; ſoit miſe cette valeur à ſa place dans la quantité $\Psi \cdot x$ ſoit enfin K ce qu'elle dévient alors, $z = K$ ſera l'équation démandée.

Exemple.

Pour faire voir l'accord de ces deux ſolutions, je vais appliquer celle-ci au même exemple que la précédente, où l'on a $V = x^2 + y^2$, $\Delta \cdot x = m\,x$ & $\Psi \cdot x = \frac{x^2}{a}$.

Il eſt évident qu'afin que dans l'équation $x^2 + y^2 = b$, on ait $y = y'$ en feſant $x = x'$, l'on doit avoir $b = x'^2 + y'^2$; ſoit donc éliminée y des deux équations $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$ & $y = m\,x$, on aura $x^2 + m^2\,x^2 = x'^2 + y'^2$, ou $x^2 = \frac{x'^2 + y'^2}{1 + m^2}$ ſoit miſe cette valeur à ſa place dans $\frac{x^2}{a}$,

l'on aura $\frac{x'^2+y'^2}{a(1+m^2)}$, & par conſéquent pour équation demandée $z = \frac{x'^2+y'^2}{a(1+m^2)}$.
qui eſt la même que celle que nous avons déja trouvée.

PROBLÊME II

Déterminér la forme que doit avoir la fonction φ, pour qu'en feſant dans l'équation $z = M + N\varphi V$ $y = \Delta \cdot x$, on ait $z = \Psi \cdot x$; les quantités M, N & V étant données d' une manière quelconque, en x & y.

Solution

Soient M', N' & V' les fonctions de x que l'on a en ſubſtituant à la place de y ſa valeur $\Delta \cdot x$ dans les quantités M, N & V; il eſt évident que l'on aura par la condition $\Psi \cdot x = M' + N' \varphi V'$. Soit fait actuellement $V' = u$, d' où l'on tirera la valeur de x en u, & ſoit $x = f u$ cette valeur, qui miſe à ſa place dans l'équation précédente donnera

$$\Psi \cdot (f \cdot u) = M'' + N'' \varphi u,$$

les quantités M'' & N'' étant ce que déviennent M' & N' en y mettant $f \cdot u$ à la place de x on aura par conſéquent

$$\varphi u = \frac{\Psi \cdot (f \cdot u) - M''}{N''}$$

Or on connoit les formes des fonctions Ψ & f, & la manière dont M'' & N'' ſont compoſées de u, donc on connoitra la forme de la fonction φ. C. Q. F. T.

Exemple

Soit propoſé de déterminer la nature de la fonction φ, pour que l'équation $z = y^n x^m + x^p y^q \varphi (a x - y)$ don

donne $z = b x^2$ en fesant $y = c x$.

Soit mise à la place de y sa valeur $c x$, & l'équation déviendra $b x^2 = c^n x^{m+n} + c^q x^{p+q} \varphi (a x - c x)$ soit fait maintenant $a x - c x = u$, ce qui donne $x = \frac{u}{a-c}$, & soit substituée cette valeur de x, on aura

$$\frac{b u^2}{(a-c)^2} = c^n \left(\frac{u}{a-c}\right)^{m+n} + c^q \left(\frac{u}{a-c}\right)^{p+q} \varphi u$$

d'où l'on tirera $\varphi u = \frac{b}{c^q} \left(\frac{u}{a-c}\right)^{2-p-q} - c^{n-q} \left(\frac{u}{a-c}\right)^{m+n-p-q}$

donc l'équation qui satisfera à la question sera

$$z = y^n x^m + x^p y^q \left\{ \frac{b}{c^q} \left(\frac{a x - y}{a-c}\right)^{2-p-q} - c^{n-q} \left(\frac{a x - y}{a-c}\right)^{m+n-p-q} \right\}$$

En effet, si dans cette équation l'on fait $y = c x$, on trouve $z = b x^2$.

En supposant la perfection de l'analyse, cette opération sera toujours praticable, lorsque les fonctions Δ & Ψ seront analytiques, mais si $y = \Delta \cdot x$ & $z = \Psi x$ représentent les équations des courbes discontinues, la fonction φ n'aura pas de valeur analytique. Il sera néantmoins possible de construire la surface dont l' équation est $z = M + N \varphi V$, de telle manière qu'elle passe par la courbe discontinue dont les symboles d'équations sont $y = \Delta \cdot x$ & $z = \Psi \cdot x$.

Construction.

La question se réduit à trouver l'ordonnée z qui répond à un x & un y donnés à volonté. Pour cela soient *CAD* le plan horisontal des x & y, *BAC* le plan des x & z, *s m S* la courbe discontinue par laquelle doit passer la surface, & dont les projections *r q R* & *s m' S'* ont pour symboles d'équations, la première $y = \Delta \cdot x$ & la seconde $z = \psi \cdot x$ enfin soient *A P* & *P Q* les coordonnées pour lesquelles il s'agit de construire la verticale Planche I FIG. II

$QM = z$. Cela posé soit décrite sur le plan horisontal la courbe TQq, dont l'équation est $V = b$, la constante b devant être telle que la courbe passe par le point Q, ou qu'en fesant $x = AP$ on ait $y = PQ$: cette courbe rencontrera rqR en un point q, par lequel on élévera la verticale qm, qu'on prolongera jusqu' à la courbe smS; on menera qp parallele aux y, & on élévera la verticale pm', qu'on prolongera jusqu'à la courbe $sm'S'$ qu'elle rencontrera en un point m', & l'on aura $qm = pm'$. On construira sur le plan vertical BAC la courbe $KM'm'$ dont l'équation est $z = M' + N' \beta$, M' & N' étant les fonctions de x que donne la substitution dans M & N de la valeur de y prise dans l' équation $V = b$, & β étant une constante telle que la courbe passe par le point m'. Enfin on élévera la verticale PM', on fera $QM' = PM'$, & le point M sera dans la surface demandée.

Car si dans l'équation $z = M + N \varphi V$ on met à la place de y sa valeur prise dans $V = b$, on aura $z = M' + N' \beta$, équation de la projection verticale $KM'm'$ de l' intersection Mm de la surface demandée par une surface cylindrique verticale qui auroit pour base la courbe TQq; & dans laquelle la constante β doit être telle que cette projection passe par le point m' à fin que pour le point p l'on ait $z = pm' = qm$, & que la surface demandée passe par conséquent par le point m.

Dans certains cas particuliers cette construction se simplifie beaucoup; par exemple, si la proposée est $z = x \varphi \left(\frac{x}{y}\right)$, on engendrera la surface en fesant glisser une droite sur la courbe à double courbure donnée, & dont l'extrémité soit fixée à l'origine des coordonnées, car l'équation $\frac{x}{y} = b$ est celle d' une droite qui passe par le point A, quelque soit la constante b, & en substituant la valeur

de y priſe dans cette équation, on a $z = x \varphi b$, qui eſt encore celle d'une droite qui paſſe par le même point quelque ſoit $\varphi \cdot b$. Ainſi l'équation $z = x \varphi \left(\frac{x}{y}\right)$ eſt celle d'une ſurface conique à baſe quelconque; mais dont le ſommet eſt déterminé à l'origine.

AUTRE SOLUTION DU PROBLEME II.

Tirée de la conſtruction.

La queſtion ſera reſoluë, ſi en feſant $AP = x'$, & $PQ = y'$, on trouve une valeur de z en x' & y' qui ſatisfaſſe aux conditions. Pour cela ſoit fait $V = b$, & ſoit déterminé b de telle manière qu'en feſant $x = x'$ on ait $y = y'$. Soit tirée de cette équation la valeur de y en x, x' & y', pour la mettre dans les quantités M & N & ſoient M' & N' ce qu'elles deviennent par cette ſubſtitution; ſoit éliminée y de deux équations $V = b$ & $y = \Delta \cdot x$, ce qui donnera une valeur de x en x' & y', que l'on mettra à ſa place dans $\psi \cdot x$, & ſoit K ce que devient cette fonction; cela fait, ſi dans l'équation $M' + N' \beta = z$ on détermine β de telle manière que pour cette même valeur de x on ait $z = K$, & qu'enſuite on mette par tout x' à la place de x, on aura l'équation demandée.

Je ne démontre pas ce procédé, par ce qu'il n'eſt que l'application de l'analyſe à la conſtruction précédente, où je ſuppoſe alors que les fonctions Δ & Ψ ſoient analytiques.

Il pourroit arriver que la propoſée fût de cette forme, $F \cdot z = M + N \varphi V$, F étant le caractère d'une fonction connüe, mais cette équation ne feroit pas plus difficile à déterminer que la précédente, car en mettant par tout à la place de y ſa valeur priſe dans $y = \Delta x$, on

aura $F(\Psi \cdot x) = M' + N' \varphi V'$, ou $\Psi' x = M' + N' \varphi V'$, d'où l'on tirera la nature de la fonction φ comme je l'ai fait dans la première solution. Ainsi par ce problême on est en état de déterminer toute équation qui ne contiendra qu'une fonction arbitraire.

CONSTRUCTION DU MEME PROBLÊME.

Dans le cas où toutes les quantités M, N & V seroient elles mêmes discontinuës.

Les quantités M, N & V étant fonctions des deux variables x & y, ne peuvent être représentées que par les ordonnées verticales de trois surfaces courbes données ou constructibles, & par ce qu'elles sont supposées discontinuës; l'on doit avoir, avant de construire la surface demandée, trois autres surfaces discontinuës, soit données au hazard, soit construites par quelques méthodes telles que celles que j'ai déjà données, & dont les symboles d'équations soient

$z = M$ pour la première.
$z = N$ pour la seconde.
& $z = V$ pour la troisième.

On élévera par le point donné Q, pour lequel on cherche l'ordonnée de la surface à construire, une verticale que l'on prolongera jusqu'à ce qu'elle rencontre la surface, dont le symbole d'équation est $z = V$, en un point par lequel on menera un plan horizontal, qui coupera cette surface en une courbe dont la projection horisontale sera la courbe discontinue TQq, on aura pour équation $V = b$ · cette courbe étant construite, on imaginera une surface cylindrique verticale, dont elle soit la base, & qui coupera les deux autres surfaces données en deux courbes dont les projections verticales seront les courbes disconti-

Planche I FIG. II

nuës HNG & hng, & auront pour ſymboles d'équations la première $z = N'$ & la ſeconde $z = M'$; les quantités M' & N' repréſentant ce que deviendroient M & N ſi l'on pouvoit analytiquement y mettre pour y ſa valeur priſe dans l'équation diſcontinue $V = b$ · or l'équation de la courbe $KM'm'$ eſt comme je l'ai déjà dit

$$z = M' + N'\beta$$

on aura donc $PM' = Pn + PN \times \beta$ · mais la conſtante β doit être telle que la courbe paſſe par le point m', ou que pour l'abciſſe Ap l'on ait $pm' = pg + pG \times \beta$, ce qui donne $\beta = \frac{pm' - pg}{pG}$, donc ſi l'on conſtruit l'expreſſion

$$Pn + \frac{PN \times \{pm' - pg\}}{pG}$$

on aura l'ordonnée $PM' = QM$. C. Q. F. F.

PROBLÊME III

Déterminer les formes que doivent avoir les deux fonctions φ & φ', pour que l'équation $z = \varphi V + x\varphi' V$ ſatisfaſſe aux deux conditions ſuivantes, 1° qu'en feſant $y = \Delta \cdot x$ on ait $z = \Psi \cdot x$, 2° qu'en feſant $y = \Delta' \cdot x$, on ait $z = \Psi' \cdot x$, la quantité V étant une fonction donnée en x & y, & les formes des fonctions Δ, Δ', Ψ, Ψ' étant connuës.

Solution.

Soient V' la fonction de x que l'on obtient en mettant à la place de y dans V ſa première valeur $= \Delta \cdot x$, & V'' la fonction de x que l'on obtient en y mettant ſa ſeconde valeur $\Delta' x$, il eſt clair que l'on aura par les conditions les deux équations ſuivantes.

$$(A) \quad \Psi \cdot x = \varphi V' + x \varphi' V'$$

$$(B) \quad \Psi' \cdot x = \varphi V'' + x \varphi' V''.$$

Soit fait $V' = u$, & de cette équation ſoit tirée la valeur de x en u, que je ſuppoſe repréſentée par $f \cdot u$, & que l'on mettra à la place de x dans l'équation (A) l'on aura (C) $\Psi : (f \cdot u) = \varphi u + f u \cdot \varphi' u$.

Soit fait de même $V'' = v$, & ſoit $f' . v$ la valeur de x priſe dans cette équation, en la mettant dans l'équation (B) l'on aura

$$(D) \quad \Psi' (f' \cdot v) = \varphi v + f' u \cdot \varphi' v.$$

on tirera de la première $\varphi u = \Psi (f \cdot u) - f u \cdot \varphi' u$, mettant à la place de φ cette forme dans l'équation (D), l'on aura

$$\Psi' (f' \cdot v) = \Psi (f \cdot v) - f . v . \varphi' v + f' v \cdot \varphi' v$$

& par conſéquent

$$\varphi' v = \frac{\Psi' \cdot (f' \cdot v) - \Psi \cdot (f \cdot v)}{f' v - f \cdot v}$$

or on connoit les formes des fonctions Ψ, Ψ', f & f', donc on connoitra 1° celle de la fonction φ'. Subſtituant actuellement à la place de φ' dans l'équation (C), la forme que l'on vient de trouver, l'on aura

$$\varphi u = \Psi (f \cdot u) - \frac{f \cdot u \Psi' \cdot (f' u) + f \cdot u \Psi \cdot (f \cdot u)}{f' u - f u}$$

ou bien réduiſant

$$\varphi u = \frac{f' u \Psi (f u) - f u \Psi' (f' \cdot u)}{f' u - f u}$$

donc on connoitra 2° la forme de la fonction φ, & par conſéquent l'équation demandée ſera

$$z = \frac{f' V \Psi (f \cdot V) - f V \Psi' (f' V) + x \Psi' (f' V) - x \Psi (f \cdot V)}{f' V - f V.}$$

C. Q. F. T.

Exemple:

Soit proposé de déterminer les fonctions arbitraires φ & φ' dans l'équation

$$z = \varphi(ax - y) + x\,\varphi'(ax - y)$$

de telle manière 1° qu'en fesant $y = bx$ on ait $z = gx^2$, 2° qu'en fesant $y = cx + h$, on ait $z = mx^2 + n$.

On mettra à la place de y ses deux valeurs bx & $cx + h$, & l'on aura les deux équations suivantes

$$gx^2 = \varphi(ax - bx) + x\,\varphi'(ax - bx)$$

$$mx^2 + n = \varphi(ax - cx - h) + x\,\varphi'(ax - cx - h)$$

on fera $ax - bx = u$, ce qui donnera $x = \frac{u}{a-b}$, & la première équation deviendra

$$\frac{gu^2}{(a-b)^2} = \varphi u + \frac{u}{a-b}\,\varphi' u,$$

d'où l'on tirera $\varphi u = \frac{gu^2}{(a-b)^2} - \frac{u}{a-b}\,\varphi' u$.

On fera de même $ax - cx - h = v$, ce qui donnera $x = \frac{h+v}{a-c}$, & la seconde équation déviendra $m\left(\frac{h+v}{a-c}\right)^2 + n = \varphi v + \frac{h+v}{a-c}\,\varphi' v$. Substituant à la place de la fonction φ sa forme que l'on vient de trouver, on aura

$$m\left(\frac{h+v}{a-c}\right)^2 + n = \frac{gv^2}{(a-b)^2} - \frac{v}{a-b}\,\varphi' v + \frac{h+v}{a-c}\,\varphi' v$$

d'où l'on tirera $\varphi' v = \dfrac{m\left(\frac{h+v}{a-c}\right)^2 + n - \frac{gv^2}{(a-b)^2}}{\frac{h+v}{a-c} - \frac{v}{a-b}}$

mettant enfin cette forme dans la valeur de φu, & réduisant on trouvera

$$\varphi u = \frac{\frac{h+u}{a-c} \cdot \frac{g u^2}{(a-b)^2} - \frac{m u}{a-b}\left(\frac{h+u}{a-c}\right)^2 - \frac{n u}{a-b}}{\frac{h+u}{a-c} - \frac{u}{a-b}}$$

l'équation qui ſatisfait à la queſtion ſera donc

$$z = \frac{\frac{h+ax-y}{a-c} \cdot g\left(\frac{ax-y}{a-b}\right)^2 - \frac{m(ax-y)}{a-b}\left(\frac{h+ax-y}{a-c}\right)^2 - \frac{n(ax-y)}{a-b} + mx\left(\frac{h+ax-y}{a-c}\right)^2 + nx \quad g\left(\frac{ax-y}{a-b}\right)^2}{\frac{h+ax-y}{a-c} - \frac{ax-y}{a-b}}$$

il eſt en effet facile de voir que cette équation remplit les deux conditions.

On pourroit réduire conſidérablement cette valeur de z, mais elle ne paroitroit pas être de la forme $\varphi\,(a x - y) + x\,\varphi'\,(a x - y)$.

Remarque.

L'équation $z = \varphi\,(a x - y) + x\,\varphi'\,(a x - y)$, intégrale de $\frac{\delta \delta z}{d x^2} + 2 a \frac{\delta d z}{dx\,dy} + a^2 \frac{d d z}{d y^2} = 0$ eſt celle de la ſurface engendrée par le mouvement d'une droite qui gliſſeroit ſur les deux courbes à double courbure dont les équations ſont $y = \Delta \cdot x$ & $z = \Psi \cdot x$ pour l'une $y = \Delta' \cdot x$, $z = \Psi' \cdot x$ & pour l'autre, de manière que cette droite fût toujours dans des plans verticaux, paralleles, & dont l'équation générale feroit $a x - y = \beta$, β étant une conſtante pour chaque plan, mais variable d'un plan à l'autre. Car en feſant $a x - y =$ conſtante dans l'équation, elle devient $z = A + B x$, qui eſt à une droite, & dans laquelle les conſtantes A & B doivent être telles que cette droite ſoit appuiée ſur les deux courbes à double courbure données à fin que la ſurface, en paſſant par les deux courbes, ſatisfaſſe aux conditions.

Il feroit facile de tirer delà la conftruction de l'équation $z = \varphi(ax - y) + x\varphi'(ax - y)$, même en fuppofant les fonctions Δ, Δ', Ψ, & Ψ' difcontinuës, mais comme ce n'eft qu'un cas particulier du problême fuivant, je ne m'y arrêterai pas d'avantage.

PROBLÊME IV.

Déterminer les formes des fonctions φ, & φ', pour que dans l'équation

$$z = M\varphi V + N\varphi' V + K$$

l'on ait 1° $z = \Psi \cdot x$ en fefant $y = \Delta \cdot x$, 2° $z = \Psi' x$ en fefant $y = \Delta' x$. Les quantités M, N, K & V étant données d'une manière quelconque en x & y, & les fonctions Δ, Δ', Ψ & Ψ' étant auffi connuës.

Solution.

Soient M', N', K' & V' les fonctions de x que deviennent correfpondamment les quantités M, N, K & V en y mettant pour y fa première valeur $\Delta \cdot x$. Soient de même M'', N'', K'' & V'' ce qu'elles deviennent en y mettant la feconde valeur de y $\Delta \cdot x$, il eft évident que l'on aura les deux équations fuivantes.

$$(A) \qquad \Psi \cdot x = M'\varphi V' + N'\varphi' V' + K'$$

$$\& \; (B) \qquad \Psi' x = M''\varphi V'' + N''\varphi' V'' + K''$$

Soit fait $V' = u$, & foit $x = fu$ la valeur de x que donne cette équation, foit fait de même $V'' = v$ & foit $x = f'v$ la valeur de x que l'on en tire; on fubftituera la première de ces valeurs dans (A) & la feconde dans (B), & l'on aura

$$\Psi(f \cdot u) = M^{\backprime}\varphi u + N^{\backprime}\varphi' u + K^{\backprime}$$

$$\& \; \Psi'(f' \cdot v) = M^{\backprime\backprime}\varphi v + N^{\backprime\backprime}\varphi' v + K^{\backprime\backprime}$$

les quantités $M^{\backprime}$, $N^{\backprime}$ & $K^{\backprime}$ étant les fonctions de u, que

donne la substitution de $f \cdot u$ à la place de x dans M', N' & K', de même M'', N'' & K'' étant les fonctions de v que l'on trouve en mettant $f'v$ à la place de x dans M'', N'' & K''. Ces deux équations se traiteront comme les équations (C) & (D) du problême précédent, c'est-à-dire qu'on en éliminera une des fonctions arbitraires, pour connoitre la forme de l'autre & réciproquement, ce qui n'est sujet à aucune difficulté.

Remarque.

On ne parvient par cette méthode à trouver les formes des deux fonctions indépendantes φ & φ', que par ce qu'elles sont composées de la même quantité V; autrement elle seroit insufisante.

Corollaire.

Il suit delà que de quelque nombre d'arbitraires que soit composée l'équation

$$z = K + L\varphi V + M\varphi' V + N\varphi'' V \ldots \text{\&c.}$$

il sera toujours possible de déterminer les fonctions φ, φ' φ''; pour qu'en fesant

$$1^\circ\ y = \Delta \cdot x \quad \text{on ait} \quad z = \Psi \cdot x$$
$$2^\circ\ y = \Delta' \cdot x \quad \text{on ait} \quad z = \Psi' \cdot x$$
$$3^\circ\ y = \Delta'' \cdot x \quad \text{on ait} \quad z = \Psi'' \cdot x$$
$$\text{\&c.} \qquad\qquad \text{\&c.}$$

le nombre de ces conditions étant égal à celui des arbitraires, car en exprimant les conditions on a

$$1^\circ\ \Psi \cdot x = K' + L'\varphi V' + M'\varphi' V' + N'\varphi'' V' \ldots \text{\&c.}$$
$$2^\circ\ \Psi' \cdot x = K'' + L''\varphi V'' + M''\varphi' V'' + N''\varphi'' V'' \ldots \text{\&c.}$$
$$3^\circ\ \Psi'' \cdot x = K''' + L'''\varphi V''' + M'''\varphi' V''' + N'''\varphi'' V''' \ldots \text{\&c.}$$
$$\text{\&c.} \qquad\qquad \text{\&c.}$$

fesant dans la première $V' = u$, dans la seconde $V'' = v$,

dans la troisième $V''' = \omega \ldots$ &c. on aura autant d'équations

$$\Psi (f \cdot u) = K' + L' \varphi u + M' \varphi' u + N' \varphi'' u \cdots \text{\&c.}$$
$$\Psi' (f' \cdot v) = K'' + L'' \varphi v + M'' \varphi' v + N'' \varphi'' v \cdots \text{\&c.}$$
$$\Psi'' (f'' \cdot \omega) = K''' + L''' \varphi \omega + M''' \varphi' \omega + N''' \varphi'' \omega \cdots \text{\&c.}$$
&c. &c.

qu'il y a d'arbitraires dans la proposée, par conséquent il sera facile de les éliminer toutes, pour les connoitre chacune en particulier, comme je l'ai fait dans le problême précédent.

Construction.

Il s'agit de trouver pour un x & un y donné à volonté l'ordonnée verticale z de la surface donc l'équation est $z = M \varphi V + N \varphi' V$, les fonctions φ & φ' étant telles que cette surface passe par deux courbes à double courbure données, continuës ou discontinuës & qui aient pour symboles d'équations la première $y = \Delta \cdot x$ & $z = \Psi x$, & la seconde $y = \Delta' \cdot x$ & $z = \Psi' \cdot x$

Pour cela soient, comme dans les figures précédentes, CAD le plan horisontal des x & y, BAC celui des x & z, smS une des courbes à double courbure par lesquelles doit passer la surface, & dont les projections rqR & $sm'S'$ ont pour symboles d'équations la première $y = \Delta \cdot x$ & la seconde $z = \Psi \cdot x$. Soit de même uNU la seconde courbe à double courbure donnée, & donc les projections vTV & unU' ont des équations représentées par $y = \Delta' \cdot x$ & $z = \Psi' \cdot x$. Enfin soient AP & PQ les x & y données à volonté, pour lesquelles il s'agit de construire l'ordonnée verticale $QM = z$. Cela posé, par le point donné Q on construira la courbe $T'Qq$ qui ait pour équation $V = b$, l'indéterminée b devant être telle que cette courbe passe par le point Q, elle rencontrera Planche I FIG. III

les deux courbes $r\,q\,R$ & $v\,T\,V$ en deux points q & T, par lesquels on abbaissera sur l'axe $A\,C'$ les perpendiculaires $q\,q'$ & $T\,t$, ce qui donnera les points q' & t par lesquels on élévera les verticales $q'\,m'$ & $t\,n$, qu'on prolongera jusqu'à ce qu'elles rencontrent, la première, la courbe $s\,m'\,S'$ en un point m', &, la seconde, la courbe $u\,n\,U'$ en un point n. Celà fait on construira sur le plan vertical $B\,A\,C$ la courbe $n\,M'\,m'$ qui a pour équation $z = M'\,\alpha + N'\,\beta + K'$, les quantités M', N' & K' étant ce que deviennent correspondamment M, N & K en y mettant pour y sa valeur prise dans l'équation $V = b$, de plus α & β étant des constantes qu'on déterminera de telle manière que la courbe $n\,M'\,m'$ passe par les points déterminés n & m'; enfin on élévera la verticale $P\,M'$, on fera $Q\,M = P\,M'$, & le point M sera dans la surface demandée.

En effet, soient élevées les verticales $q\,m$ & $T\,N$, il est évident par construction, que l'on aura $q\,m = q'\,m'$, & $T\,N = t\,n$; soit imaginée par la courbe $T\,Q\,q$ une surface cylindrique verticale, dont l'équation sera nécessairement $V = b$, elle coupera la surface à construire dans une courbe $N\,M\,m$ qui passera par le point cherché M & par les deux points N & m. La projection verticale de cette intersection passera par conséquent par les points n & m', & on aura son équation on fesant $V = b$ dans la proposée. Cette équation sera donc $z = M'\,\alpha + N'\,\beta + K'$, dans laquelle il est évident que les constantes α & β doivent être déterminées de manière que cette projection passe par les deux points n & m'. Or les deux courbes $N\,M\,m$; & $n\,M'\,m'$ pour la même abscisse $A\,P$ ont les ordonnées $P\,M$ & $P\,M'$ égales, donc en fesant $Q\,M = P\,M'$, le point M est dans la surface demandée.

Corollaire.

On conſtruira de la même manière l'équation $z = K + L\,\phi V + M\,\phi' V + N\,\phi'' V \ldots$ &c. quelque nombre de fonctions arbitraires qu'elle renferme, pourvu que l'on ait un pareil nombre de courbes données, continues ou diſcontinues, par leſquelles la ſurface ſoit obligée de paſſer. Il arrivera ſeulement que l'équation

$$z = K' + L'\,\alpha + M'\,\beta\,N'\,\gamma \ldots \text{ \&c.}$$

qui appartient à la courbe $n\,M'\,m'$, contiendra un pareil nombre de conſtantes indéterminées, mais on aura un même nombre de points tels que n, $m' \ldots$ &c. par leſquels devra paſſer cette courbe, & qui ſerviront à déterminer ces conſtantes.

AUTRE SOLUTION DU PROBLÊME IV

Tirée de la conſtruction.

Soient $AP = x'$, & $PQ = y'$, il eſt évident que la queſtion conſiſte à trouver la valeur de z en x' & y' qui ſatisfait aux conditions. Pour cela on fera $V = b$, & l'on déterminera b de telle manière qu'en feſant $x = x'$ on ait $y = y'$; on prendra dans cette équation la valeur de y en x, x' & y', on la mettra à ſa place dans les quantités M, N & K, & ſoient M', N' & K' les fonctions en x, x' & y' que donne cette ſubſtitution. On éliminera y des deux équations $V = b$ & $y = \Delta \cdot x$, ce qui donnera une premiére valeur de x en x' & y' que l'on mettra à ſa place dans $\Psi \cdot x$, & ſoit P ce que devient cette quantité. On éliminera de même y des deux équations $V = b$ & $y = \Delta' \cdot x$, ce qui donnera une ſeconde valeur de x en x' en x' & y', que l'on mettra à ſa place dans $\Psi' x$, & ſoit P ce que devient cette quantité. Cela fait, ſi

Planche I FIG. III

dans l'équation

$$z = M'\alpha + N'\beta + K'$$

on détermine les conſtantes α & β de telle manière 1° que, pour la première valeur que l'on vient de trouver pour x, on ait $z = P$, 2° que pour la ſeconde valeur, on ait $z = P'$, & qu'enſuite on mette x' à la place de x, on aura l'équation demandée.

Cette ſolution n'étant ſimplement que l'application de l'analyſe à la conſtruction précédente, il eſt inutile de la démontrer. On remarquera ſeulement qu'elle ne peut avoir lieu qu'en ſuppoſant les fonctions Δ, Δ', Ψ & Ψ' analytiques & continues.

L'application de ces deux ſolutions à un même exemple produiroit le même reſultat.

Corollaire.

On détermineroit facilement par cette méthode, comme par la première les fonctions arbitraires dans l' équation $z = K + L\varphi V + M\varphi' V + N\varphi'' V \cdots$ &c., il arriveroit ſeulement que l'équation $z = K' + L'\alpha + M'\beta + N'\gamma \cdots$ &c. Contiendroit autant des conſtantes indéterminées que la propoſée renfermeroit de fonctions arbitraires, mais auſſi l'on auroit un même nombre de conditions pour les déterminer, par ce qu'on trouveroit autant de valeurs particulières de x qui miſes à ſa place devroient donner la première $z = P$, la ſeconde $z = P'$, la troiſième $z = P'' \cdots$ &c.

PROBLEME V

Déterminer la forme que doit avoir chacune des fonctions φ & φ' dans l'équation $z = \varphi V + \varphi' W$, pour qu'en feſant 1° $V = a$, on ait $z = F \cdot x$, 2° qu'en feſant

$y = \Delta \cdot x$ on ait $z = \Psi \cdot x$. Les quantités V & W étant données d'une manière quelconque en x & y & les fonctions F, Δ & Ψ étant de formes connuës.

Il faut remarquer que la première condition n'a pas toute la généralité dont elle feroit fufceptible, par ce qu' elle renferme la quantité déterminée V.

Solution.

Soit W' la fonction de x que l'on obtient en mettant dans W pour y fa valeur prife dans l'équation $V = a$, il eft clair que l'on aura par la première condition

$$F \cdot x = \varphi\, a + \varphi'\, W'$$

& par conféquent $\varphi'\, W' = F \cdot x - \varphi\, a$. Soit fait $W' = u$, pour en tirer une valeur de x en u, que je repréfente par $f \cdot u$, on aura en fubftituant cette valeur

$$\varphi' u = F(f \cdot u) - \varphi\, a.$$

Mettant cette forme à fa place dans la propofée, elle deviendra $z = \varphi V + F(f . W) - \varphi\, a$ mais par ce que $\varphi\, a$ eft une conftante, la quantité $\varphi V - \varphi\, a$ eft une certaine fonction de V différente de φV, & que je défigne par $\varphi\grave{}\ V$; on aura donc

$$z = \varphi\grave{} V + F(f W)$$

Equation dans laquelle il n'y a plus qu'une fonction arbitraire, puifque l'on connoit les formes des fonctions F & f. Or il refte encore la feconde condition que l'on n'a pas encore emploiée, donc elle rentrera dans le cas du problême II & fe traitera de la même manière.

Remarque.

Quoique dans les conditions (qui font que l'on ait 1° $z = F \cdot x$ en fefant $V = a$, 2° $z = \Psi . x$ en fefant $y = \Delta . x$) les fonctions F, Δ & Ψ puiffent être quel-

conques, il eſt néantmoins néceſſaire, pour que la queſtion ne renferme pas de contradiction, qu'elles aient entr'elles un certain rapport. En effet les équations $y = \Delta \cdot x$ & $z = \Psi . x$ appartiennent à une courbe à double courbure déterminée par laquelle doit paſſer la ſurface courbe qui a pour équation la propoſée, de même $V = a$ & $z = F . x$ ſont les équations d'une autre courbe à double courbure par laquelle doit auſſi paſſer la même ſurface. Or, comme il ſera facile de la réconnoitre dans la conſtruction ſuivante, ces deux courbes doivent ſe couper ſur la ſurface, donc leurs projections doivent auſſi ſe couper, donc pour l'ordonnée x qui répond au point d'interſection de leurs projections horiſontales, on doit avoir auſſi un point d'interſection dans les projections verticales, ce qui peut s'expliquer analytiquement de cette manière les fonctions F, Δ & Ψ doivent être telles qu'en éliminant y des deux équations $V = a$ & $y = \Delta . x$, pour avoir une valeur de x en conſtantes, & en ſubſtituant cette valeur dans les fonctions $F . x$ & $\Psi . x$, on ait deux quantités égales.

Exemple.

Soit propoſé de déterminer les formes des fonctions arbitraires φ & φ', pour que dans l'équation $z = \varphi\,(bx - y) + \varphi'\,(x + y)$ on ait 1° $z = \sqrt{Ax}$ en feſant $bx - y = a$, 2° $z = Kx$ en feſant $y = n + qx$.

(D'après la rémarque précédente les conſtantes A, a, K, n & q, qui entrent dans les expreſſions des conditions à remplir, doivent être telles que l'on ait $K = \sqrt{A\frac{b-q}{n+a}}$, car ſi l'on égale les deux valeurs de y on aura $bx - a = n + qx$, ce qui donne $x = \frac{n+a}{b-q}$ & mettant cette valeur

leur dans les quantités $\sqrt{Ax}$ & Kx, qui doivent alors être égales, on aura $\sqrt{A\frac{n+a}{b-q}} = K\ \frac{n+a}{b-q}$, d'où l'on tirera $K = \sqrt{A\frac{b-q}{n+a}}$)

L'équation $bx - y = a$ donne $y = bx - a$, mettant cette valeur à la place de y dans la propoſée, on aura $\sqrt{Ax} = \varphi a + \varphi'(x + bx - a)$, ou $\varphi'(x + bx - a) = \sqrt{Ax} - \varphi a$. Soit fait $x + bx - a = u$, ce qui donne $x = \frac{a+u}{b+1}$, & ſoit miſe cette valeur de x à ſa place dans la valeur de la fonction $'$, & l' on aura $\varphi' u = \sqrt{A\frac{a+u}{b+1}} - \varphi a$, ce qui fera connoitre la forme de la fonction φ', que l'on ſubſtituera dans la propoſée, & l'on aura $z = \varphi(bx - y) + \sqrt{A\frac{a+x+y}{b+1}} - \varphi a$ ou bien feſant $\varphi(bx - y) - \varphi a = \varphi'(bx - y)$ l'on aura

$$z = \varphi'(bx - y) + \sqrt{A\frac{a+x+y}{b+1}}$$

équation dans laquelle il ne ſe trouve plus que la fonction arbitraire φ', & que l'on traitera comme celle du problême II.

Pour cela, on ſubſtituëra à y ſa valeur priſe dans l'équation $y = n + qx$, & l'on aura

$$Kx = \varphi'(bx - n - qx) + \sqrt{A\frac{a+x+n+qx}{b-1}}$$

que l'on transformera en feſant $bx - n - qx = v$,

ou $x = \frac{n+v}{b-q}$ & l'on aura

$$K\frac{n+v}{b-q} = \varphi' v + \sqrt{A\frac{a+n+\frac{n+v}{b-q}(1+q)}{b-1}}$$

où il sera facile de reconnoitre la forme de la fonction φ', & d'où l'on conclurra que l'équation demandée, est

$$z = K\frac{n+bx-y}{b-q} - \sqrt{A\frac{a+n+\frac{n+bx-y}{b-q}(1+q)}{b+1}} + \sqrt{A\frac{a-x+y}{b+1}}.$$

En effet si l'on fait dans cette équation $y = n + qx$, on trouve $z = Kx$, & si l'on fait $bx - y = a$, on trouve $z = \sqrt{Ax}$, par ce que comme je l'ai fait remarquer plus haut, l'on doit avoir $K = \sqrt{A\frac{b-q}{n+a}}$.

Construction.

La question consiste, comme dans les constructions précédentes à trouver pour deux coordonnées x, & y données à volonté l'ordonnée verticale z de la surface courbe qui a pour équation $z = \varphi V + \varphi' W$, quand même les deux courbes à double courbure par lesquelles doit passer cette surface, & dont les projections ont pour symboles d'équations, l'une $V = a$ & $z = F \cdot x$, l'autre $y = \Delta . x$ & $z = \Psi . x$, seroient discontinuës & tracées au hazard dans l'espace.

Planche II FIG. IV

Pour cela, soient CAD le plan horisontal des x & y, BAC celui des x & z, $M'm'$ & $sm'S$ les deux courbes à double courbure par lesquelles doit passer la surface, soient rqR & $sm''m'''$ les projections horisontale & verticale de la première, & dont les symboles d'équations sont $V = a$ pour l'une & $z = F.x$ pour l'autre ; soient de même $Q'q'$ & $YM''m''$ les projections horisontale &

verticale de la ſeconde, & dont les équations ſont repréſentées par $y = \Delta . x$ pour l'une, & par $z = \Psi . x$ pour l'autre. Il eſt évident que ſi par le point q' interſection des deux courbes $Q' q'$ & $r R$ on éléve la verticale $q' m'$, elle rencontrera dans le même point m' les deux courbes $s m' S$ & $M' m'$, par ce qu'étant ſur la même ſurface, ces deux courbes doivent avoir un point commun correſpondant au point d'interſection de leurs projections; d'où il ſuit que ſi l'on mêne $q' K'$ parallele aux y, & que l'on éléve la verticale $K' m''$, cette droite rencontrera les deux courbes $S m'' m'''$ & $Y M'' m''$ dans le même point m'', & que l'on aura $K' m'' = q' m'$. Enfin ſoient $A P = x$, $P Q = y$, de manière qu'il faille conſtruire la verticale $Q M$ qui paſſe par le point Q, le point M étant dans la ſurface.

Cela poſé, on conſtruira ſur le plan horiſontal la courbe $Q q$ dont l'équation eſt $V = \alpha$, α étant une conſtante telle que la courbe paſſe par le point Q, cette courbe coupera $r q' R$ quelque part en un point q, par lequel on menera $q K$ perpendiculaire aux x, on élévera la verticale $K m''$, qu'on prolongera juſqu'à ce qu'elle coupe la courbe $S m'' m'''$ en un point m'''. on prendra dans l'équation $V = \alpha$ la valeur de y que l'on ſubſtituera dans W, pour avoir une fonction de x que je repréſente par W', on fera la même choſe pour l'équation $V = a$, & ſoit W^1 la nouvelle fonction de x trouvée; on fera enſuite $W^1 = u$, ce qui donnera une valeur de x en u, que je repréſente par $f . u$, la forme de la fonction f étant connue. On portera de A en X une droite égale à $f W'$, $A P$ étant $= x$, & on élévera la verticale $X Y$ qu'on terminera à la courbe $M'' m''$: on regardera pour un inſtant $A K$ comme $= x$, & l'on fera dans cette hypothéſe $A G = f . W'$, on élévera la verticale $G N$, enfin on fera $Q M = X Y + K m''' - G N$, & le point M ſera dans

la surface demandée. (La quantité $K m''' - G N$ est toujours la même pour toutes les verticales menées par les points de la courbe $Q q$, c'est à-dire qu'elle est constante tant que $\propto$ ne varie point).

Démonstration.

Soit supposée pour un instant la surface construite, & soit imaginée par la courbe $Q q$ une surface cylindrique verticale, qui coupe la surface suivant une courbe $M m$, dont $M''' m'''$ soit la projection verticale, il est évident 1° que cette projection doit passer par le point m''', puisque l'intersection passe elle même par le point m, & que le point m''' est la projection verticale du point m; 2° que l'on aura l'équation de la courbe $M''' m'''$ en mettant dans la proposée $z = \varphi V + \varphi' W$ à la place de y. sa valeur prise dans $V = \propto$, équation de la surface cylindrique verticale. Cette équation sera donc $z = A + \varphi' W'$, la constante arbitraire A devant être telle que la courbe $M''' m'''$ passe par le point déterminé m'''. Mais si l'on fait aussi passer par la courbe $Q' q'$ une surface cylindrique verticale, dont l'équation sera nécessairement $V = a$, elle coupera la surface à construire suivant la courbe $M' m'$, dont la projection verticale est $Y M'' m''$, & l'on aura l'équation de cette projection, en mettant de même dans la proposée $z = \varphi V + \varphi' W$, à la place de y sa valeur prise dans $V = a$. Cette équation sera par conséquent $z = a + \varphi' W'$, or la courbe $Y M'' m''$ est donnée, & son équation est aussi $z = F \cdot x$, donc on aura $F x = a + \varphi' W'$, & par conséquent $\varphi' W' = F x - a$. Soit fait actuellement $W' = u$, d'où l'on tirera la valeur de x en u qui sera $x = f \cdot u$, & soit substituée cette valeur de x dans la dernière équation, elle deviendra $\varphi' u = F(f \cdot u) - a$, ce qui fera connoitre la forme de la fonction φ', & d'où il sera facile

de conclure que l'équation de la courbe $M''' m'''$ doit être $z = A - a + F(f \cdot W')$. Mais puiſque l'équation de la courbe $Y M'' m''$ eſt $z = F \cdot x$, il ſuit que ſi l'on porte de A en X une quantité égale à $f . W'$, ce qui n'eſt ſujet à aucune difficulté, la verticale $X Y$ ſera $= F(f . W')$. Quant à la conſtante $A - a$, que pour abbreger je repreſenté par h, elle doit être telle que pour le point K on ait $z = K m'''$. Soit pour un inſtant régardé $A K$ comme $= x$, ſoit fait dans cette hypothèſe $A G = f . W'$, & ſoit élévée la verticale $G N$, il eſt évident que l'on aura z ou $K m''' = h + G N$, donc on aura $h = K m''' - G N$, & par conſéquent $P M''' = X Y + K m''' - G N$: or $Q M = P M'''$, donc .... &c. C. Q. F. D.

Remarque I.

Pour ſimplifier la conſtruction, j'ai fait quelques opérations analytiques, mais elles ne s' exécutent pas ſur les fonctions $F \Delta$ & Ψ, donc les formes peuvent être ſoumiſes ou non à la loi de continuité. Je n'ai opéré que ſur les quantités V & W que j'ai ſuppoſées analytiques. Il pourroit néanmoins arriver que ces grandeurs fuſſent diſcontinuës, & ne puſſent être repreſentées chacune que par l'ordonnée d'une ſurface courbe donnée au hazard dans l' eſpace, ou conſtructible par une méthode quelconque, alors la conſtruction précédente ſeroit imparfaite, puiſque les opérations preſcrites ne pourroient pas s'éxécuter analytiquement, mais il ſeroit poſſible de les conſtruire elles mêmes.

Tout étant dans la figure 5, comme dans la figure 4, il s'agit premièrement de conſtruire les courbes $Q q$ & $Q' q'$ dont les équations diſcontinuës ont pour ſymboles $V = \propto$ & $V = a$. Pour cela, je ſuppoſe donnée dans l'eſpace la ſurface courbe dont l'équation eſt repréſentée

Planche II FIG. V

par $z = V$, & on la coupera par deux plans horiſontaux diſtans du plan CAD, l'un de la quantité α & l'autre de a, les projeƈtions horiſontales des ſeƈtions que formeront ces deux plans ſeront les courbes demandées Qq & $Q'q'$, car ces deux courbes ſeront telles que l'on aura pour l'une z ou $V = \alpha$ & pour l'autre $V = a$. On conſtruira donc ces deux projeƈtions. (Cette opération n'eſt ſujette à aucune difficulté, car ſi la ſurface eſt donnée quoiqu'au hazard, pour un x, & un z quelconque, on doit être en état de trouver la coordonnée y correſpondante, & par conſéquent pour l'abſciſſe AP & la verticale $z = \alpha$ ou $z = a$, de trouver l'ordonnée PQ on PQ'. Si cette ſurface n'eſt pas tout à fait donnée au hazard, mais qu' elle ſoit conſtruƈtible par une méthode analogue à celles que j'ai déjà données, & obligée de paſſer par quelques courbes diſcontinuës, comme j'ai fait voir qu'on pourroit, pour un x & un y donnés à volonté trouver la verticale z correſpondante, il ſera poſſible de même de conſtruire l'ordonnée y, étant données à volonté les abſciſſes x & z, en renverſant la figure, & regardant le plan BAC comme horiſontal. De plus la quantité a eſt donnée, il n'y a que l' indéterminée α que l'on doit faire telle que la courbe Qq paſſe par le point donné Q; mais il eſt facile de remplir cette condition, en élévant par le point donné Q une verticale indéfinie, qui rencontrera la ſurface diſcontinue en un point par lequel on fera paſſer un plan horiſontal, donc la ſeƈtion doit donner la courbe Qq, car ce plan étant horiſontal, donne 1° z ou $V =$ conſtante. 2° cette conſtante eſt telle que Qq paſſe par le point Q, puiſque le plan coupant, & par conſéquent ſa ſeƈtion paſſe par le point où la verticale indéfinie QM rencontre la ſurface donnée. Que l'on ſuppoſe auſſi donnée au hazard, ou conſtruite la ſurface diſcontinue dont l'équation eſt repréſentée par $z = W$, & ſoit menée par la

courbe $Q q$ une ſurface cylindrique verticale, elle coupera la ſeconde ſurface dans une courbe dont la projection $E H L$ ſur le plan vertical aura une équation repréſentée par $z = W'$, puiſque l'on a W' en mettant dans W à la place de y ſa valeur priſe dans $V = \alpha$, & que $V = \alpha$ eſt l'équation de la ſurface cylindrique. Soit de même menée par la courbe $Q' q'$ une ſeconde ſurface cylindrique verticale, elle coupera la ſeconde ſurface diſcontinuë & donnée dans une courbe dont la projection verticale $e h l$ aura pour ſymbole d'équation $z = W'$, puiſque l'équation de cette ſeconde ſurface cylindrique eſt repréſentée par $V = a$; ſoient donc conſtruites les deux courbes $E H L$ & $e h l$, il eſt évident 1° que pour tel $x = A P$ qu'on voudra, on aura $P H = W'$ & $P h = W'$, la courbe $e h l$ ayant lieu pour toute l'étendue de la ſurface à conſtruire, & la courbe $E H L$ ne pouvant être employée que pour les points de la courbe $q Q$; 2° que ſi on prend une abſciſſe quelconque $A I$, & que l'on mene l'ordonnée horiſontale $I T$, l'on aura $I T = f.(A I)$, car on trouve la fonction f en feſant $W' = u$, & en tirant de cette équation la valeur de $x = f.u$, donc ſi l'on a $I T = x$, & par conſéquent $A I = W$, on aura $A I = u$ & $I T = f.u$. Donc ſi par le point H on mene l'horiſontale $H O$, & que par le point O on mene la verticale $X Y$, on aura $A X = f(O X) = f(P H) = f.W'$. On trouvera de même $A G$ en menant par le point k l'horiſontale $k g$, & en abaiſſant la verticale $g G$, les points X & G étant trouvés, le reſte s'achevera comme dans la conſtruction précédente.

Rémarque II

Planche II FIG. IV & V Si la courbe $m'' M'' N$ diſcontinue & tracée au hazard étoit ſubitement interrompue en θ, la verticale XY ſeroit (je n'oſe pas dire imaginaire, par ce que cela ſuppoſeroit peût-être une expreſſion analytique) mais impoſſible, & par conſéquent la ſurface à conſtruire n'auroit aucun point qui répondit au point Q. Si la même courbe $T Y M''$ étoit ſubitement interrompue en θ', la verticale $G N$ ſeroit de même impoſſible, & par conſéquent toutes les ordonnées z menées par les points de la courbe $Q q$ ſeroient auſſi impoſſibles, parceque, comme je l'ai déjà dit la verticale XY n'appartient qu'au point Q & que $K m''' - G N$ appartient à toute l'étendue de la courbe $Q q$.

D'après tout ce qui a été dit précédemment, il ne ſeroit pas difficile de conſtruire ſur le plan horiſontal le contour de la projection de tout ce que la ſurface à conſtruire a de réel ou de poſſible, on éviteroit par-là un grand nombre d'opérations inutiles, mais tant de quantités peuvent devenir imaginaires ou impoſſibles, que leur énumération nous meneroit ici trop loin.

AUTRE SOLUTION DU PROBLÊME V

Tirée de la conſtruction.

Soient x' & y' les coordonnées pour leſquelles il s'agit de trouver l'expreſſion de la verticale z, on fera $V = \alpha$, α étant une conſtante qu'on déterminera de telle manière qu'en feſant $x = x'$, on ait $y = y'$. On éliminera y des deux équations $V = \alpha$ & $y = \Delta . x$ ce qui donnera une valeur de x en x', y' & conſtante que je repréſente par X. On prendra la valeur de y dans $V = \alpha$, qu'on

qu'on substituera dans W, pour avoir une fonction de x, x' & y' que je représente par W'. On fera la même chose pour $V = a$, & l'on aura une fonction de x, sans x' ni y', que j'exprime par W'. On fera $W' = u$, ce qui donnera une valeur de x en u que je désigne par fu, & la forme de la fonction f sera connuë. On composera $f.W'$, & ensuite $F\ (fW')$, ce qui est facile, puisque la fonction F est donnée dans les conditions ; enfin on composera $F\ (f.X')$ en mettant dans $F\ (f.W')$ X à la place de x, & l'équation de la surface demandée sera

$$z = F\,(fW') + \Psi . X - F\,(fX')$$

après avoir mis partout x' à la place de x.

Cette opération étant dèmontrée par la construction précédente, je ne m'y arrêterai pas d'avantage, mais pour faire voir l'accord des deux solutions, je vais appliquer celle-ci au même exemple que la précédente.

Exemple.

Soit proposé de trouver les formes des fonctions φ & φ'; pour que dans l'équation $z = \varphi\,(bx - y) + \varphi'\,(x + y)$ on ait 1° $z = \sqrt{Ax}$ en fesant $bx - y = a$, 2° $z = Kx$ en fesant $y = n + qx$.

Il est évident qu'afin que dans l'équation $bx - y = \alpha$ l'on ait $y = y'$ en fesant $x = x'$, l'on doit avoir $\alpha = bx' - y'$. Soit donc éliminé y des deux équations $y = n + qx$ & $bx - y = bx' - y'$, ce qui donnera $x = \frac{n - y' + bx'}{b - q} = X$. Soit ensuite prise la valeur de y dans $bx - y = bx' - y'$, pour la mettre à sa place dans $x + y$, & l'on aura $W' = x + bx - bx' - y'$. On prendra de même la valeur de y dans $bx - y = a$, qu'

on mettra dans $x \mp y$, & l'on aura $W' = x + bx - a = u$, ce qui donnera

$$x = \frac{a+u}{b+1} = f \cdot u.$$

on aura par conſéquent

$$fW' = \frac{a + x + bx - bx' + y'}{b+1}$$

& $$F(fW') = \sqrt{A\frac{a + x + bx - bx' + y'}{b+1}}$$ par ce que $F.x = \sqrt{A.x}$ mettant X à la place de x, on trouvera

$$F(f.X') = \sqrt{A\frac{a + \frac{n - y' + bx'}{b - q}(b+1) - bx' + y'}{b+1}}$$

ou bien en réduiſant

$$F(f.X') = \sqrt{A\frac{\frac{n - y' + bx'}{b - q}(1+q) + n + a}{b+1}}$$

donc mettant x' à la place de x, l'équation démandée ſera

$$z = \sqrt{A\frac{x' - y' + a}{b+1}} + K\frac{n - y' + bx'}{b - q} - \sqrt{A\frac{\frac{n - y' + bx'}{b - q}(1+q) + n + a}{b+1}}$$

qui eſt la même que celle que l'on a déjà trouvée en appliquant la première ſolution au même exemple

La première ſolution peût paroitre plus ſimple, mais elle n'a pas comme celle-ci l'avantage de donner directement la valeur de z en x & y, ſans avoir recours aux ſolutions des problêmes précédens.

PROBLÊME VI

Déterminer les fonctions arbitraires dans l'équation $z = K + L\,\phi V + M\,\phi' W$, où les quantités K, L, M, V & W ſont données en x & y, de telle manière 1° qu'en feſant $V = a$, l'on ait $z = F \cdot x$, 2° qu'en feſant $y = \Delta \cdot x$ on ait $z = \psi \cdot x$.

Solution.

Soit priſe dans l'équation $V = a$ la valeur de y que l'on mettra à ſa place dans les quantités K, L, M, V & W, & ſoient K', L', M', V' & W' les fonctions de x que donne cette ſubſtitution, on aura par la première condition $F \cdot x = K' + L'\,\phi a + M'\,\phi' W'$, équation dans laquelle la quantité $\phi\, a$ n'étant plus qu'une conſtante indéterminée il ſera facile de reconnoitre la forme de la fonction ϕ', qui ſera

$$\phi' W' = \frac{F \cdot x - K' - L'\,\phi a}{M'}$$

Soit fait actuellement $W' = u$, d'où l'on tirera la valeur de x en u, que je repréſente par $f \cdot u$, & l'équation précédente ſe transformera en celle-ci

$$\phi' u = \frac{F(fu) - k - l\,\phi a}{m}$$

Les quantités k, l, m étant les fonctions connuës de u que donne la ſubſtitution de cette valeur de x dans K', L' & M'. Soit mis W à la place de u dans les quantités k, l & m, & ſoient k', l' & m' les fonctions de W que l'on obtiendra, il eſt évident qu'en ſubſtituant à la fonction ϕ' ſa forme que l'on vient de trouver, la propoſée ſe transformera en celle-ci

$$z = K + L\,\phi V + M\left(\frac{F(fW) - k' - l'\,\phi a}{m'}\right)$$

qui ne contient plus qu'une fonction arbitraire ϕ, & qui rentre par conſéquent dans le cas du problême II.

Il eſt vrai qu'il reſtera encore la conſtante indéterminée φa, mais lorſque l'on aura la valeur de z ſans fonctions arbitraires, il ſera facile de la déterminer. Il faut ſimplement remarquer que les conditions de la queſtion ne ſuffiſent pas pour cela, car en feſant l' opération, on s'apperçoit aiſément que quelque ſoit la quantité φa, la valeur de z ſatisfait également aux deux conditions, & par conſéquent, que l'équation finale appartient également à une infinité de ſurfaces courbes diſtinctes, dont les équations ſont de la forme de la propoſée, & qui paſſent toutes par les courbes à double courbure données. Ainſi pour déterminer celle de ces ſurfaces dont on cherche l'équation, comme il ne reſte plus d'indéterminée que la quantité φa, il faut aſſigner de plus dans l' eſpace un point par lequel elle doive paſſer, & déterminer φa de telle manière que cette condition ſoit remplie. C'eſt-à-dire que la conſtante φa doit être telle qu'en mettant dans l'équation trouvée de la ſurface, à la place de x & de y, deux conſtantes données, la valeur de z devienne égale à une autre conſtante auſſi donnée. Tout celà deviendra plus ſenſible par un exemple.

Exemple.

Soit propoſé de déterminer les fonctions arbitraires φ & φ' dans l' équation

$$z = y\,\varphi\,(bx - y) + y^2\,\varphi'\,(x + y)$$

de façon 1° qu'en feſant $bx - y = a$, l'on ait $z = \sqrt{Bx}$, 2° qu'en feſant $y = cx$ on ait $z = p + qx$; où l'on obſervera que l'on doit avoir $p = \sqrt{B\frac{a}{b+c}} - \frac{qa}{b+c}$, afin qu'en égalant les deux valeurs données de y, ce qui donne $bx - a = cx$, on ait $\sqrt{Bx} = p + qx$ ſuivant la remarque qui ſuit le problême précédent.

En mettant dans la propoſée à la place de y ſa valeur priſe dans $b\,x - y = a$, elle deviendra
$\sqrt{B\,x} = (b\,x - a)\,\varphi\,a + (b\,x - a)^2\,\varphi'\,(x + b\,x - a)$
d'où, feſant $x + b\,x - a = u$, & réduiſant l'on tirera

$$\varphi'\,u = \sqrt{B\,\frac{(b+1)^3\,(a+u)}{(b\,u - a)^4}} - \varphi\,a \cdot \frac{b+1}{b\,u - a}.$$

ſubſtituant cette forme à la place de la fonction φ' dans la propoſée, l'on aura

$$z = y\,\varphi\,(b\,x - y) + y^2\,\sqrt{B\,\frac{(b+1)^3\,(a+x+y)}{(b\,(x+y) - a)^4}} - \frac{y^2 . (b+1)}{b\,(x+y) - a}\,\varphi\,a$$

équation qui ne contient plus que la fonction arbitraire φ.

Soit actuellemeut miſe à la place de y ſa valeur priſe dans $y = c\,x$ l'on aura par la ſeconde condition

$$p + q\,x = c\,x\,\varphi(b\,x - c\,x) + c^2 x^2 \sqrt{B\,\frac{(b+1)^3 (a + x(1+c))}{(b\,x(1+c) - a)^4}} - \frac{c^2\,x^2\,(b+1)}{b\,x(1+c) - a}\,\varphi\,a$$

d'où feſant $b\,x - c\,x = v$, l'on tirera, réduction faite

$$\varphi \cdot v = \frac{b-c}{c\,v}\,p + \frac{q}{c}\,c\,v(b-c)\sqrt{B\,\frac{(b+1)^3 \left(a + \frac{v(1+c)}{b-c}\right)}{(b\,v(1+c) - a(b-c))^4}} + \frac{(b+1)\,v\,c\,\varphi\,a}{b\,v(1+c) - a(b-c)}$$

ſubſtituant enfin cette forme dans la dernière valeur de z, on trouvera pour équation demandée

$$z = \begin{cases} \dfrac{p(b-c)\,y}{c(b\,x - y)} + \dfrac{q\,y}{c}\,c\,y\,(b\,x - y)\,(b-c)\sqrt{B\,\dfrac{(b+1)^3 \left(a + \frac{(b\,x\ y)(1+c)}{b\ \cdot\ c}\right)}{(b(b\,x - y)(1+c) - a(b-c))^4}} \\ + \dfrac{c\,y\,(b+1)\,(b\,x - y)\,\varphi \cdot a}{b(b\,x - y)(1+c) - a(b-c)} + y^2 \sqrt{B\,\dfrac{(b+1)^3\,(a + x + y)}{(b\,(x+y) - a)^4}} \\ - \dfrac{y^2\,(b+1)\,\varphi\,a}{b\,(x+y) - a} \end{cases}$$

qui ſatisfait aux conditions quelque valeur que l'on donne à la conſtante indeterminée $\varphi\,a$, puiſque ſon facteur

$y(b+1)\left(\frac{c(bx-y)}{b(bx-y)(1+c)-a(b-c)}-\frac{y}{b(x+y)-a}\right)$ devient $=0$, ſoit qu'on faſſe $bx-y=a$, ſoit qu'on faſſe $y=cx$; donc cette conſtante ne depend pas des conditions; donc la queſtion eſt indéterminée, & ne peut ſe particulariſer qu'en donnant une valeur de z qui reponde à des valeurs données pour x & pour y, c'eſt-à-dire, qu'en aſſignant dans l'eſpace un point pour lequel doive paſſer la ſurface. Soient donc Π, π & $\tilde{\omega}$ les trois coordonnées de ce point, il faudra donner à φa une valeur telle qu'en feſant $x=\Pi$ & $y=\pi$, l'on ait $z=\tilde{\omega}$. Ce qui n'eſt plus ſujet à aucune difficulté, & ce que je ne fairois pas ici parceque les expreſſions ſont trop diffuſes.

Conſtruction.

Conſtruire l'équation $z=K+L\varphi V+M\varphi' W$, de telle manière que la ſurface courbe, à laquelle elle appartient, paſſe par deux courbes données, continues ou diſcontinuës, qui aient pour ſymboles d'équations, la première $V=a$, $z=F\cdot x$, la ſeconde $y=\Delta\cdot x$, $z=\Psi\cdot x$, & que cette ſurface paſſe encore par un point donné dans l'eſpace, & au quel repondent les coordonnées Π, π & $\tilde{\omega}$.

Planche III. FIG. VI

Soient, de même que dans la fig. 4, CAD le plan horiſontal des x & y, CAB celui des x & z, $M'm'$ & smS les courbes à double courbure données par leſquelles doit paſſer la ſurface, & dont les projections $Q'q'$, $M'm'$, rqR & $sm''m'''$ ont correſpondamment pour ſymboles d'équations $V=a$, $z=F\cdot x$, $y=\Delta\cdot x$ & $z=\Psi\cdot x$. Soit μ le point par lequel doit de plus paſſer la ſurface, & dont les projections π & μ''' ſont données, ou, ce qui revient au même, pour le quel on connoît les coordonnés $A\Pi=\Pi$, $\Pi\pi=\pi$ & $\pi\mu=\tilde{\omega}$. Soit

enfin Q le point pris à volonté ſur le plan des x & y, pour le quel il s' agit de conſtruire l' ordonnée QM de la ſurface. Cela poſé, on conſtruira la courbe $\pi\pi'$ dont l'equation eſt $V = \propto$, la conſtante $\propto$ étant telle que cette courbe paſſe par le point π, & on la prolongera juſqu' à ce qu'elle coupe quelque part la courbe $r\,q\,R$ en un point π', par le quel on menera $\pi' k$ perpendiculaire à l' axe AC, & on élevera la verticale $k\,\mu''$, qu' on prolongera juſqu' à la rencontre de la courbe $s\,m''\,m'''$. On prendra dans $V = \propto$ la valeur de y qu' on ſubſtituera dans les quantités K, L, M & W, qui par-là deviendront des fonctions de x, que je ſuppoſe repreſentées par K', L', M' & W'; on prendra de même dans $V = a$ la valeur de y que l' on mettra à ſa place dans les mêmes quantités, & ſoient $K^{\backprime}$, $L^{\backprime}$, $M^{\backprime}$ & $W^{\backprime}$ les nouvelles fonctions de x que donne cette ſubſtitution. On fera $W^{\backprime} = u$, & l' on en tirera une valeur de x en u que j' exprime par $f \cdot u$, & que l' on mettra à la place de x dans $K^{\backprime}$, $L^{\backprime}$ & $M^{\backprime}$ qui par là deviendront des fonctions de u, que je déſigne reſpectivement par k, l & m. Cela fait, les fonctions k, l & m étant connuës, on les compoſera en W', c'eſt-à-dire, que l' on y mettra par tout W' à la place de u, & elles deviendront de nouvelles fonctions de x que j' indique par k', l' & m'. On conſtruira la quantité $K' + \frac{M'}{m'}\,(F \cdot (f W') - k')$ par la valeur de $x = Ak$ (fig. 6), & on la retranchera de la droite $k\,\mu''$ pour avoir une différence que je repréſente par R. On conſtruira la même quantité pour la valeur de $x = A\Pi$ & on la retranchera de la droite $\Pi\,\mu''' = \pi\,\mu$, pour avoir une ſeconde différence r. Soit Λ ce que devient L' lorſque x eſt $= Ak$, & λ lorſque l'on a $x = A\Pi$, ſoit auſſi Ω ce que devient $\frac{M'\,l'}{m'}$ lorſque x eſt $= A\ k$, & ω lorſque x eſt $= A\Pi$, & ſoit déſigné par a le raport $\frac{r\,\Lambda - R\,\lambda}{\lambda\,\Omega\,\Lambda\,\omega}$ dans

lequel toutes les quantités ſont connuės & conſtructibles.

On conſtruira la courbe $Q\,q$ dont l'équation eſt $V = \alpha'$, α' étant tel que cette courbe paſſe par le point Q, & on la prolongera juſqu'à ce quelle rencontre $r\,q\,R$ en un point q, par lequel on abbaiſſera $q\,K$ perpendiculaire à l'axe $A\,C$, & on élévera la verticale $K\,m'''$. On prendra dans $V = \alpha'$ la valeur de y qu'on mettra dans K, L, M & W, ce qui donnera des fonctions de x que je indique par K'', L'', M'' & W'', on compoſera en W'' les fonctions k, l & m, en y mettant W'' à la place de u, & elles deviendront de nouvelles fonctions de x que je déſigne par k'', l'' & m''. On conſtruira la quantité $K'' + \frac{M''}{m''}\,(F(f\,W'') - k'' - a\,l'')$ pour une valeur de $x = A\,K$ (fig. 6) on la retranchera de la droite $K\,m'''$ & ſoit R' la différence; enfin on conſtruira

$$K'' + \frac{R'}{\Lambda'}\,L'' + \frac{M''}{m''}\,(F(f\,W'') - k'' - a\,l'')$$

pour la valeur de $x = A\,P$, Λ' étant ce que devient L'' en feſant $x = A\,K$. & l'on aura la verticale $Q\,M$ demandée.

Demonſtration.

Soit imaginée par la courbe $Q\,q$ une ſurface cylindrique verticale, qui coupera la ſurface à conſtruire (pour un inſtant ſuppoſée conſtruite) en une courbe $M\,m$, qui paſſera néceſſairement par le point demande M; ſoit élévée par le point q la verticale $q\,m$ qui rencontrera la courbe $s\,m\,S$ quelque part en un point m, par lequel doit auſſi paſſer l'interſection $M\,m$; cela fait il eſt évident que la courbe $M'''\,m'''$ projection verticale de $M\,m$ doit paſſer par le point m''', & que l'on aura ſon équation en x & z, en mettant dans celle de la ſurface, la valeur de y priſe

dans

dans l'équation de la ſurface cylindrique; or l'équation de cette dernière ſurface eſt $V = \alpha'$, donc celle de la projection verticale de l'interſection ſera

$$z = K'' + L'' A + M'' \varphi' W''$$

la conſtante A n'étant pas abſoluë, mais une certaine fonction de AP & de PQ, conſtante pour tous les points de la courbe Qq, mais variable dependamment de α', & devant être telle que la courbe $M''' m'''$ paſſe par le point déterminé m''. Soit de même coupée la ſurface à conſtruire par une ſurface cylindrique verticale qui auroit $Q' q'$ pour baſe, il eſt clair que l'interſection ſera la courbe donnée $M' m'$, projétée verticalement en $M'' m''$; & l'on aura de même l'équation de cette projection en mettant dans la propoſée à la place de y ſa valeur priſe dans $V = a$, qui appartient à la ſurface cylindrique, on aura donc pour la courbe $M'' m''$

$$z = K^{\backprime} + L^{\backprime} a + M^{\backprime} \varphi' W^{\backprime}.$$

Mais par les conditions, on a auſſi pour la même courbe $z = F \cdot x$, donc on aura

$$F \cdot x = K^{\backprime} + L^{\backprime} a + M^{\backprime} \varphi' W^{\backprime}$$

& en feſant $W^{\backprime} = u$, d'où l'on tire $x = fu$, on aura $\varphi' u = \dfrac{F(fu) - k - la}{m}$, ce qui fait connoitre la forme de la fonction φ', qui miſe à ſa place dans l'équation de la courbe $M''' m'''$ la transforme en celle-ci $z = K'' + L'' A + \dfrac{M''}{m''} (F.(f \cdot W'') - k'' - l''a)$ qui ne contient plus de fonctions arbitraires, mais ſimplement les deux conſtantes indéterminées A & a, dont la première eſt une conſtante rélative, fonction de α', comme je l'ai déjà dit, & dont l'autre eſt une conſtante abſoluë, fonction de a, & qui doit être determinée de telle manière que la ſurface paſſe par le point donné μ. Soit enfin imaginée une troiſiéme ſurface cylindrique verticale, & qui

ait $\pi\,\pi'$ pour base; elle coupera la surface à construire dans une courbe $\mu\,\mu'$, qui passera évidemment par le point donné μ, & dont la projection verticale passera par les deux points déterminés μ''' & μ''. En fesant le même raisonnement que pour la courbe $M'''\,m'''$, on trouvera que l'équation de celle-ci doit être

$$z = K' + L'\,A' + \frac{M'}{m'}\,(F(f\,W') - k' - a\,l')$$

où la quantité a est la même que précédemment, mais où A' est une constante indéterminée, fonction de α; ces deux constantes devant être telles que la courbe passe par les deux points déterminés μ''' & μ''. Il faut donc qu'en construisant d'abord pour une valeur de $x = A\,k$ cette valeur de z, on trouve $z = k\,\mu''$, & ensuite pour une valeur de $x = A\,\Pi$ ou trouve $z = \Pi\,\mu'''$. Donc si l'on construit $K' + \frac{M'}{m'}\,(F(f\,W') - k')$ pour le point Π, on aura $r = \lambda\,A' - a\,\omega$, de même si l'on construit la même quantité pour le point k, on aura $R = \Lambda\,A' - a\,\Omega$, d'où l'on tirera les valeurs de A' & de a, on aura donc $a = \frac{r\,\Lambda - R\,\lambda}{\lambda\,\Omega - \Lambda\,\omega}$.

Ainsi dans l'équation de la courbe $M'''\,m'''$, il ne reste plus d'indéterminée que A, or elle doit être telle que pour le point K on ait $z = K\,m''$, donc si l'on construit pour ce point la quantité

$$K'' + \frac{M''}{m''}\,(F(f\,W'') - k' - a\,l'')$$

on aura $R' = A\,\Lambda'$ & par conséquent $A = \frac{R'}{\Lambda'}$, d'où il suit que l'équation déterminée de la courbe $M'''\,m'''$ est

$$z = K'' + \frac{R'}{\Lambda'}\,L'' + \frac{M''}{m''}\,(F(f\,W'') - k'' - a\,l'')$$

Donc en conſtruiſant cette valeur de z pour le point P, on doit avoir la verticale $P\,M''=Q\,M$. C. Q. F. D.

Remarque.

1° Je n'ai pas donné les conſtructions particulières des différentes fonctions de x que j'employe, parcequ'elles m'auroient rendu trop diffus, & qu'il n'y a aucun géométre qui ne ſoit en état de les trouver.

2° J'ai ſuppoſé les différentes quantités K, L, M, V & W analytiques, mais c'étoit pour ſimplifier la deſcription des opérations, car il ſeroit poſſible de conſtruire la propoſée, quand même aucune de ces quantités ne ſeroit analytique, & qu'elles ne pourroient être répréſentées que par les ordonnées de ſurfaces courbes diſcontinuës & données, ſoit executées au hazard, ſoit conſtructibles par quelque méthode analogue aux précédentes. Si je n'entre pas-ici dans ce détail, c'eſt que la figure devient trop compliquée, & que d'ailleurs j'ai donné dans le problême précédent un exemple de la manière dont il faudroit s'y prendre.

AUTRE SOLUTION DU MÊME PROBLÊME

Tirée de ſa conſtruction.

Soient x' & y' les coordonnées pour leſquelles il s'agit de trouver l'expreſſion de la verticale z; on fera $V=\alpha$, α étant tel qu'en feſant $x=\Pi$ on ait $y=\pi$; on éliminera y des deux équations $V=\alpha$ & $y=\Delta x$, ce qui donnera une valeur de x en conſtantes que je repréſente par ξ. On mettra dans les quantités K, L, M & W la valeur de y priſe dans $V=\alpha$, & elles deviendront K', L', M' & W'. On y mettra de même la va-

leur de y prise dans $V = a$, & l'on aura des nouvelles fonctions de x que j'exprime par K', L', M', & W'. on fera $W' = u$, & l'on en tirera une valeur de x en u, désignée par fu, & que l'on mettra à sa place dans les quantités K', L', & M', qui par-là deviendront des fonctions connuës de u que je représenté correspondamment par k, l, & m. On mettra dans ces dernières quantités W' à la place de u, & l'on aura des nouvelles fonctions de x que j'indique par k', l' & m', & dans l'équation

$$z = K' + A L' + \frac{M'}{m'} (F(fW') - k' - a l')$$

l'on déterminera les deux constantes A & a de telle manière 1° qu'en fesant $x = \Pi$ on ait $z = \tilde{\omega}$, 2° qu'en fesant $x = \xi$, on ait $z = \Psi \cdot \xi$.

On mettra partout dans les quantités K', L', M', W', k', l', m' & ξ, x' à la place de Π, & y' à la place de π, & soient K'', L'', M'', W'', k'', l'', m'' & ξ' ce que deviendront respectivement ces quantités. On mettra ξ' à la place de x dans la quantité

$$K'' + \frac{M''}{m''} (F(fW'') - k'' - a l'')$$

on la retranchera de $\Psi \xi'$, & soit R la différence, soit aussi Λ ce que devient L'' en fesant $x = \xi'$, & l'équation demandée sera

$$z = K'' + \frac{R}{\Lambda} L'' + \frac{M''}{m''} (F(fW'') - k'' - a l'')$$

après avoir mis partout x' à la place de x.

APPLICATION DE CETTE SECONDE SOLUTION

Au même exemple que la première.

Dans cet exemple on a $K = 0$, $L = y$, $M = y^2$, $V = b x - y$, $W = x + y$, & par conséquent $\alpha = b \Pi - \pi$, d'où l'on tire $\xi = \frac{b \Pi - \pi}{b - c}$. prenant la valeur de y dans

$b\,x - y = b\,\Pi - \pi$, & la ſubſtituant on aura

$L' = b(x-\Pi) + \pi$ $\quad$ $L' = b\,x - a$ $\quad$ $f\,u = \dfrac{a+u}{b+1}$

$M' = (b(x-\Pi)+\pi)^2$ on trouvera de même $M' = (bx-a)^2$ & par conſéquent $l = \dfrac{b\,u-a}{b+1}$

$W' = x(b+1) - b\Pi + \pi$ $\quad$ $W' = x(b+1) - a$ $\quad$ $m = \left(\dfrac{b\,u-a}{b+1}\right)^2$

$$l' = \frac{b\,x(b+1) - b^2\Pi + b\,\pi - a}{b+1}.$$

$$m' = \left(\frac{b\,x(b+1) - b^2\Pi + b\,\pi - a}{b+1}\right)^2$$

ainſi l'équation $z = K' + A\,L' + \dfrac{M'}{m'}\,(F(f\,W') - k' - a\,l')$

deviendra

$$z = A(b\,x-a) + (b\,x-a)^2 \frac{\sqrt{B\dfrac{a+x(b+1)-b\Pi+\pi}{b+1} - a\left(\dfrac{bx(b+1)-b^2\Pi+b\pi-a}{b+1}\right)}}{\left(\dfrac{b\,x(b+1)-b^2\Pi+b\,\pi-a}{b+1}\right)^2}$$

où les conſtantes A & a doivent être telles que l'on ait en même tems les deux équations ſuivantes

$$(C)\ \tilde{\omega} = A(b\,\Pi-a) + (b\Pi-a)^2 \frac{\sqrt{B\dfrac{a+\Pi+\pi}{b+1} - a\left(\dfrac{b\,\Pi+b\,\pi-a}{b+1}\right)}}{\left(\dfrac{b\,\Pi-b\,\pi-a}{b+1}\right)^2}$$

$$(D)\quad p + \frac{q(b\,\Pi-\pi)}{b-c} = A\left(\frac{b^2\Pi-b\pi}{b-c} - a\right)$$

$$+\left(\frac{b^2\Pi-b\pi}{b-c} - a\right)^2 \frac{\sqrt{B\left(a+\dfrac{b\Pi-\pi}{b-c}\dfrac{-b\Pi+\pi}{b+1}\right) - a\left(b\left(\dfrac{b\Pi-\pi}{b-c}\right) - \dfrac{b^2\Pi+b\pi-a}{b+1}\right)}}{\left(b\left(\dfrac{b\,\Pi-\pi}{b-c}\right) - \dfrac{b(b\,\Pi-\pi)+a}{b+1}\right)^2}$$

ce qui donnera par conſéquent la valeur de a.

On trouvera aussi

$$L'' = b(x - x') + y' \qquad l'' = \frac{bx(b+1) - b^2x' + by' - a}{b+1}$$

$$M'' = (b(x - x') + y')^2 \qquad m'' = \left(\frac{bx(b+1) - b^2x' + by' - a}{b+1}\right)^2$$

$$W' = x(b+1) - bx' + y' \qquad \xi' = \frac{bx' - y'}{b - c}$$

réduction faite

$$R = p + \frac{q(bx'-y')}{b-c} - \frac{c^2(bx'-y')^2\sqrt{B(b+1)^3\left(\frac{a+(bx'-y')(1+c)}{b-c}\right)}}{(b(bx'-y')(1+c) - a(b-c))^2}$$

$$+ \frac{ac^2(bx'-y')^2(b+1)}{\{b(bx'-y')(1+c) - a(b-c)\}(b-c)}$$

$$\Lambda = b\left(\frac{bx' - y'}{b - c} - x'\right) + y' = \frac{c(bx' - y')}{b - c}.$$

Par conséquent l'équation

$z = K'' + \frac{R}{\Lambda} L'' + \frac{M''}{m''}(F(fW'') - k'' - a\,l''),$ où l'on a $K'' = 0$ & $k'' = 0$ deviendra en fesant $x = x'$

$$z = \begin{cases} \frac{p(b-c)y'}{c(bx'-y')} + \frac{qy'}{c} - \frac{cy'(bx'-y')(b-c)\sqrt{B(b+1)^3\left(\frac{a+(bx'-y')1+c)}{b-c}\right)}}{(b(bx'-y')(1+c) - a(b-c))^2} \\ + \frac{acy'(bx'-y')(b+1)}{b(bx'-y')(1+c) - a(b-c)} + \frac{y'^2\sqrt{B(b+1)^3(a+x'+y')}}{(b(x'+y') - a)^2} \\ - \frac{ay'^2(b+1)}{b(x'+y') - a} \end{cases}$$

Equation qui est la même que l'on déjà trouvée dans l'application que l'on a faite de la première solution au même exemple, & qui en mettant pour a sa valeur tirée des deux équations (C) & (D), sera celle de la surface demandée.

J'ai déjà remarqué que ce qui facilite la ſolution de ce problême, c'eſt cette particularité qui entre dans les conditions, qu'en feſant $V = a$, on ait $z = F \cdot x$, la quantité V n'étant pas quelconque, mais étant priſe dans la propoſée ; or les deux fonctions arbitraires φV & $\varphi' W$ n'ont rien à cet égard qui les caractériſe ; donc on reſolveroit de la même manière la propoſée, ſi une des conditions étoit qu'en feſant $W = a$ on dût avoir $z = F \cdot x$, l'autre condition étant d'ailleurs générale.

Il y a encore d'autres conditions particulières pour leſquelles ce problême ſe reſout facilement ; le problême ſuivant en eſt un exemple.

PROBLÊME VII

Déterminer les fonctions arbitraires dans l'équation $z = K + L \varphi V + M \varphi' W$, de telle manière 1° qu'en feſant $L = 0$ l'on ait $z = F . x$, 2° qu'en feſant $y = \Delta \cdot x$, on ait $z = \Psi . x$; les quantités K, L, M, V & W étant données en x & y, & les quantités $F.x$, $\Delta \cdot x$ & Ψx étant des fonctions quelconques & données de x.

Solution.

Soit priſe la valeur de y dans l'équation $L = 0$, pour la mettre à ſa place dans les quantités K, M, V & W, & ſoient K', M', V' & W' ce qu'elles deviennent par cette ſubſtitution, il eſt clair que par la première condition l'on aura $F \cdot x = K' + M' \varphi' W'$, ou $\varphi' W' = \frac{Fx - K'}{M'}$. Soit fait $W' = u$, ce qui donne une valeur de x en u que je repréſente par $f \cdot u$, & ſoit ſubſtituée cette valeur dans la dernière équation, on la transformera en celle-ci $\varphi' u = \frac{F(f \cdot u) - k}{m}$, k & m étant les fonctions de u que

l'on obtient en mettant dans K' & M' à la place de x fa valeur $f\cdot u$. Soient k' & m' les fonctions en x & y que l'on a en mettant W à la place de u dans k & m, & l'on aura $\varphi' W = \frac{F(f\cdot W)-k'}{m'}$; donc la propofée fe transformera en

$$z = K + L\,\varphi V + \frac{M}{m'}\,(F(fW) - k')$$

dans laquelle il n' y a plus qu'une fonction arbitraire, que l'on déterminera comme dans les problêmes précédens. Pour cela, foient $`K$, $`L$, $`M$, $`V$, $`W$, $`k'$ & $`m'$ ce que deviennent les quantités K, L, M, V, W, k' & m' en mettant pour y fa valeur $\Delta\cdot x$; par la feconde condition, la dernière équation deviendra

$$\Psi\cdot x = `K + `L\,\varphi `V + \frac{`M}{`m'}\,(F(f`W) - `k')$$

d'où l'on tirera $\varphi `V = \frac{\Psi\cdot x - `K - \frac{`M}{`m'}(F(f`W) - `k')}{`L}$.

Soit fait $`V = v$, foit $x = f'v$ la valeur de x que donne cette équation, & foient $``K$, $``L$, $``M$, $``W$, $``k'$ & $``m'$ ce que deviennent les quantités $`K$, $`L$, $`M$, $`W$, $`k'$ & $`m'$, en mettant $f'v$ à la place de x, & la dernière équation fe transformera en celle-ci

$$\varphi v = \frac{\Psi(f'v) - ``K - \frac{``M}{``m'}(F(f``W) - ``k')}{``L}$$

qui fera connoitre la forme de la fonction $\varphi\cdot v$. Soit donc mis V à la place de v dans le fecond membre de cette équation, & foient $```K$, $```L$, $```M$, $```W$, $```k'$ & $```m'$ ce qu'en deviennent tous les termes par cette fubftitution, il eft évident que l'équation demandée fera

D'après

$$z = K + \frac{L}{{}'''L}\left(\Psi(f'V) - K''' - \frac{M'''}{{}'''m'}\left(F(fW''') - {}'''k'\right)\right) + \frac{M}{m'}\left(F(fW) - k'\right)$$

C. Q. F. T.

D'aprés tout ce qu'on a vû jusqu'ici, la construction de ce problême n'a rien qui doive arrêter. De plus, il est facile d'apperçevoir que ce problême se resolveroit de la même maniére, si la première condition étoit, qu'en fesant $M = 0$ on dût avoir $z = F x$.

PROBLÊME VIII.

Déterminer quelles doivent être les formes des fonctions arbitraires φ, φ', φ'' ··· &c. dans l'équation

$$z = H + K\varphi V + L\varphi' W + M\varphi'' W + N\varphi''' W \cdots \&c.$$

pour qu'en fesant $1^\circ\ W = a$, l'on ait $z = F \cdot x$,

$2^\circ\ y = \Delta \cdot x, \ldots\ z = \Psi \cdot x$

$3^\circ\ y = \Delta' \cdot x \ldots\ z = \Psi' \cdot x$

$4^\circ\ y = \Delta'' x \ldots\ z = \Psi'' x$

&c. &c.

le nombre des conditions étant égal à celui des fonctions arbitraires, les quantités H, K, L, M, N, V & W étant données en x & y, & les fonctions $F, \Delta, \Delta', \Delta''$ ··· &c., Ψ, Ψ', Ψ''... &c. étant de formes connuës.

Solution.

Soit prise dans $W = a$ la valeur de y que l'on mettra à sa place dans les quantités $H, K, L, M, N \ldots \& V$, & soient $H', K', L', M', N' \ldots$ & V' les fonctions de x que donne cette substitution, on aura par la première condition

$$F \cdot x = H' + K'\varphi V' + L'A + M'B + N'C \ldots \&c.$$

équation dans laquelle les constantes A, B, C... &c.

ſont des conſtantes indéterminées & qui donne

$$\varphi V' = \frac{F \cdot x - H' - L' A - M' B - N' C \ldots \&c.}{K'}$$

Soit fait actuellement $V = u$, & ſoit tirée de cette équation la valeur de x en u que je repréſente par $f \cdot u$, ſoit miſe cette valeur dans H', K', L', M', N' ... &c. & ſoient h, k, l, m, n ... &c. les fonctions de u que deviennent reſpectivement ces quantités, l'équation précédente ſe transformera en celle-ci

$$\varphi u = \frac{F(f \cdot u) - h - a l, - B m - C n \ldots \&c.}{k}$$

Dans laquelle on connoitra la forme de la fonction φ, qui, miſe à ſa place dans la propoſée, la rendra, de la même forme que celle du problême IV, & par conſéquent traitable par la même méthode.

Quant aux indéterminées A, B, C ... &c. qui reſtent après l'opération, elles indiquent que les conditions du problême, contenuës dans l'énoncé, ne ſuffiſent pas pour déterminer la ſurface à laquelle appartient l'équation, mais qu'il faut encore donner outre cela autant de points dans l'eſpace par leſquels doive paſſer cette ſurface, qu'il y a des quantités arbitraires, fonctions de W, dans la propoſée.

Cette ſolution eſt trop ſimple par elle même pour avoir beſoin d'être éclaircie par un exemple.

Remarque.

Quoique les fonctions $F, \Delta, \Delta', \Delta'', \cdots \Psi\ \Psi'\ \Psi'' \cdots$ &c. puiſſent être de formes quelconques, il faut néantmoins, pour qu'il n'y ait point de conſtruction dans les conditions, que,

X étant la valeur de x que l'on a en éliminant y des deux équations $W = a$ & $y = \Delta . x$,

X' celle que l'on a en éliminant y des équations
$W = a$ & $y = \Delta' x$,

X'' Celle que l'on a en éliminant y des équations
$W = a$ & $y = \Delta'' x$

&c. &c.

l'on ait $F \cdot X = \Psi\ X$,
$F \cdot X' = \Psi' X'$,
$F \cdot X'' = \Psi'' X''$
&c. &c.

Ceci eſt analogue à la remarque du problême V, & paroitra d'ailleurs évident par la conſtruction ſuivante

Conſtruction.

Conſtruire l'équation $z = H + K \varphi V + L \varphi' W + M \varphi'' W + N \varphi''' \ldots$ &c. De telle manière que la ſurface à laquelle elle appartient paſſe par autant de courbes à double courbures données, continuës ou diſcontinuës, qu'il y a de fonctions arbitraires dans l'équation, les ſymboles d'équations de ces courbes étant

pour la première $W = a$ & $z = F \cdot x$
pour la ſeconde $y = \Delta \cdot x$ & $z = \Psi \cdot x$
pour la troiſième $y = \Delta' \cdot x$ & $z = \Psi' \cdot x$
pour la quatrième $y = \Delta'' x$ & $z = \Psi'' x$
&c. &c.

& que cette ſurface paſſe encore par autant de points donnés dans l'eſpace, qu'il y a de fonctions de W dans la propoſée, en ſorte que Π, π & $\tilde{\omega}$ ſoient les coordonnées du premier de ces points Π', π' & $\tilde{\omega}'$ celles du ſecond, Π'', π'' & $\tilde{\omega}''$ celles du troiſième & ainſi de ſuite.

Pour ſimplifier la deſcription des opérations, 1° j'ai ſuppoſé dans la figure que le nombre des fonctions arbitraires & par conſéquent celui des courbes à double courbure données, ne fût pas plus grand que quatre, mais il ſera

facile d'appercevoir que, quelque grand que pût être ce nombre, les opérations, pour être plus longues, n'en ſeroient pas plus difficiles. 2° je regarderai comme analytiques toutes les quantités $H, K, L, M, N, \ldots V$ & W, quoique la propoſée fût conſtructible, dans le cas même où toutes les quantités ſeroient diſcontinuës, & ne pourroient ſe repréſenter que par les ordonnées verticales des ſurfaces courbes diſcontinuës, ſoit executées au hazard, ſoit conſtruites comme celles des problêmes précédens. Si je ne conſtruis pas le problême dans cette généralité, c'eſt que la figure deviendroit d'une énorme complication, & que d'ailleurs j'ai donné dans le problême V un exemple de la manière dont on doit opérer ſur ces quantites. Je ſuppoſerai donc ſeulement les fonctions $F, \Delta, \Delta', \Delta'' \ldots \Psi\ \Psi'\ \Psi'' \ldots$ &c. diſcontinuës.

Planche IV FIG. VII

Enfin, pour abbréger je vais donner la conſtruction telle qu'elle n'ait pas beſoin de démonſtration. Soient CAD le plan horiſontal des x & y, & BAC celui des x & z, que $\mu^{IV}\ M^{IV}\ m^{IV}$ ſoit la courbe dont les projections ont pour ſymboles d'équations $W = a$, $z = F \cdot x$, & ſoient $K^{IV}\ Q^{IV}\ q^{IV}$. $N^{IV}\ \mathcal{N}^{IV}\ n^{IV}$ ces projections. Soient $\mu^{IV}\ \mu\ \mu'\ \mu''\ \mu'''$ la courbe dont les projections $K^{IV}\ K\ K'\ K''\ K'''$ & $N^{IV}\ N\ N'\ N''\ N'''$ ont leurs équations repréſentées par $y = \Delta \cdot x$ & $z = \Psi \cdot x$: $\mathcal{M}^{IV}\ \mathcal{M}\ \mathcal{M}'\ \mathcal{M}''\ \mathcal{M}'''$ celle dont les projections $Q^{IV}\ Q\ Q'\ Q''\ Q'''$ & $\mathcal{N}^{IV}\ \mathcal{N}\ \mathcal{N}'\ \mathcal{N}''\ \mathcal{N}'''$ ont pour équations $y = \Delta' \cdot x$ & $z = \Psi' \cdot x$, $m^{IV}\ m\ m'\ m''\ m'''$ celle dont les projections $q^{IV}\ q\ q'\ q''\ q'''$ & $n^{IV}\ n\ n'\ n''\ n'''$ ont pour équation $y = \Delta''\ x$ & $z = \Psi''\ x \ldots$ & ainſi de ſuite. Il eſt évident, puiſque toutes ces courbes ſont ſur la même ſurface, qu'au point K^{IV} l'ordonnée verticale de la courbe $\mu^{IV}\ \mathcal{M}^{IV}\ m^{IV}$ & celle de la courbe $\mu^{IV}\ \mu\ \mu'\ \mu''\ \mu'''$

doivent être égales : que de même au point Q^{IV}, celle de la première courbe & celle de la courbe $\mathcal{M}^{V}\ \mathcal{M}\ \mathcal{M}'$ $\mathcal{M}''\ \mathcal{M}'''$ doivent être égales : qu'au point q^{V} celle de la même courbe & celle de $m^{V}\ m\ m'\ m''\ m'''$ doivent être égales · · · · & ainſi de ſuite. C'eſt le ſujet de la remarque précédente.

Soient E, F, G · · · · *&c.* les points donnés par leſquels doit paſſer la ſurface, & dont le nombre eſt égal à celui des arbitraires, fonctions de W, contenuës dans la propoſée, de manière que l'on ait

$$A\,P' = \Pi \quad A\,P'' = \Pi' \quad A\,P''' = \Pi''$$
$$P'\,Q' = \pi \quad P''\,Q'' = \pi' \quad P'''\,Q''' = \pi''$$
$$Q'\,E = \tilde{\omega} \quad Q''\,F = \tilde{\omega}' \quad Q'''\,G = \tilde{\omega}''$$

Soient E', F', G' · · · · *&c.* leurs projections verticales. Enfin ſoient $A\,P$ & $P\,Q$ les deux coordonnées x & y données à volonté, pour leſquelles il s'agit de conſtruire la verticale $Q\,M = z$. Cela poſé, on conſtruira la courbe $K\,Q\,q$ qui ait pour équation $W = \alpha$, α étant tel que cette courbe paſſe par le point déterminé Q; cette courbe coupera les projections horiſontales des courbes données en des points $K\,Q\,q$ · · · *&c.* par leſquels on abbaiſſera des perpendiculaires ſur l'axe $A\,C$ qui le rencontreront en des points p, π, $\tilde{\omega}$ · · · *&c.* par leſquels on élévera des verticales $p\,N$, $\pi\,\mathcal{N}$, $\tilde{\omega}\,u$ · · · *&c.*, qu'on terminera aux projections verticales des courbes correſpondantes. Soient imaginées par les points $K\,Q\,q$ · · · *&c.* des verticales terminées aux courbes à double courbure correſpondantes, il eſt clair que l'on aura $p\,N = K\,\mu$, $\pi\,\mathcal{N} = Q\,\mathcal{M}$, $\tilde{\omega}\,n = q\,m$ · · · *&c.*

Que l'on imagine une ſurface cylindrique verticale qui ait la courbe $K\,Q\,q$ · · · pour baſe, elle coupera la ſurface à

conſtruire, & ſuppoſée pour un inſtant conſtruite, en une courbe $\mu \mathcal{M} n$, qui paſſera évidemment par le point demandé M, & de la projection verticale de laquelle on aura l'équation en mettant à la place de y dans la propoſée, ſa valeur priſe dans $W = \propto$, qui appartient à cette ſurface cylindrique. Soit $N \mathcal{N} n$ cette projection verticale, & $H^{\backslash}, K^{\backslash}, L^{\backslash}, M^{\backslash}, N^{\backslash} \cdots V^{\backslash}$ les fonctions de x que l'on obtient en mettant dans $H, K, L, M, N \cdots$ & V la valeur de y dont on vient de parler, il eſt clair que l'équation de la courbe $N \mathcal{N} n$ ſera

$$(A)\ Z = H^{\backslash} + K^{\backslash} \varphi V^{\backslash} + L^{\backslash} \varphi' \propto + M^{\backslash} \varphi'' \propto + N^{\backslash} \varphi''' \propto \cdots \&c.$$

qui ne contient plus qu'une fonction arbitraire $\varphi V^{\backslash}$, puiſque les quantités $\varphi' \propto$, $\varphi'' \propto$, $\varphi''' \propto \ldots$ ſont des conſtantes indéterminées, & qui doivent être telles que la courbe $N \mathcal{N} n$ paſſe par les points détérminés N, $\mathcal{N}$, $n \ldots$ &c.

Il faut ſimplement remarquer que ces indéterminées ne ſont conſtantes que pour toutes les verticales $Q M$ qui paſſent par la courbe $K Q q$, pour laquelle on a $\propto =$ conſtante, mais qu'elles ſeroient variables dans le paſſage de ces verticales à d'autres pour leſquelles la quantité $\propto$ ſeroit différente. Ce ne ſont à proprement parler que des conſtantes relatives.

Or la fonction $\varphi V^{\backslash}$ doit être de telle forme que ſi la courbe $K Q q$ étoit la même que $K^{\prime v} Q^{\prime v} q^{\prime v}$, c'eſt-à dire que ſi l'on avoit fait $\propto = a$, on eut

$$F \cdot x = z = H' + K \varphi V' + L' \varphi' \propto + M' \varphi'' \propto + N' \varphi''' \propto \cdots \&c.$$

Soient donc H', K', L', M', $N' \ldots V'$ Les nouvelles fonctions de x que l'on trouve en mettant à la place de $\propto$ dans $H^{\backslash}$, $K^{\backslash}$, $L^{\backslash}$, $M^{\backslash}$, $N^{\backslash} \ldots V^{\backslash}$, ou ce qui revient au même en mettant dans $H, K, L, M, N \ldots V$ à la place

de y ſa valeur priſe dans l'équation $W = a$. on aura
$F \cdot x = H' + K' \varphi V' + L' \varphi' a + M' \varphi'' a + N' \varphi''' a \ldots$ &c.
d'où l'on tirera $\varphi V' = \frac{F.x - H' - L' \varphi' a - M' \varphi'' a - N' \varphi''' a \ldots \&c.}{K'}$
Equation dans laquelle les quantités $\varphi' a$, $\varphi'' a$, $\varphi''' a \ldots$ &c. ſont des conſtantes abſoluës, puiſque a eſt une conſtante donnée par les conditions.

Soit fait actuellement $V' = u$, & ſoit $x = f \cdot u$ la valeur de x que donne cette équation, on ſubſtituera cette valeur dans les quantités $F.x$, H', L', M', $N' \ldots K'$, qui deviendront des fonctions connuës de u, que je repréſente correſpondamment par $F(f.u)$, h, l, m, $n \ldots k$
& l'on aura $\varphi u = \frac{F(fu) - h - l \varphi' a - m \varphi'' a - n \varphi''' a}{k}$

D'où il ſuit qu'aux conſtantes près $\varphi' a$, $\varphi'' a$, $\varphi''' a \ldots$ &c. qui reſtent indéterminées, la forme de la fonction φ ſera connuë. On la ſubſtituera à ſa place dans l'équation (A), & l'on aura la valeur de z en x, c'eſt-à-dire l'équation de la courbe $N \mathcal{N} n$ ſans fonctions arbitraires. Pour cela ſoit mis V' à la place de u dans les quantités k, h, l, m, $n \ldots$ &c. & ſoient repréſentées par $'h$, $'k$, $'l$, $'m$, $'n \ldots$ &c. les nouvelles fonctions de x que donne cette opération on aura $\varphi V' = \frac{F(fV') - 'h - 'l \varphi' a - 'm \varphi'' a - 'n \varphi''' a}{'k}$
d'où il ſuit que l'équation (A) deviendra

$$(B) \quad z = H' + \frac{K'}{'k} \left(F(fV') - 'h - 'l \varphi' a - 'm \varphi'' a - 'n \varphi''' a \ldots \&c.\right)$$

$+ L' \varphi' \alpha + M' \varphi'' \alpha + N' \varphi''' \alpha \ldots$ &c. où les fonctions indéterminées de a ſont des conſtantes abſoluës qui dépendent de la poſition des points donnés E, F, $G \ldots$ &c. & où les fonctions indéterminées de α dependent de la poſition des points $N \mathcal{N} n \ldots$ &c. Or ces derniers points

ſont toujours les mêmes tant que α ne varie point, c'eſt-à-dire tant que le piè de l'ordonnée QM ſe trouve ſur la même courbe KQq; mais il changent de poſition lorſque α varie, quoique d'ailleurs ils doivent toujours ſe trouver correſpondamment ſur les courbes $N^{\prime v} N N' N'' N''' \ldots$ $\mathcal{N}^{\prime v} \mathcal{N} \mathcal{N}' \mathcal{N}'' \mathcal{N}''' \ldots n^{\prime v} n n' n'' n''' \ldots$

Cette valeur de z ne peut ſe conſtruire que l'on n'ait au paravant conſtruit toutes les indéterminées $\varphi' a$, $\varphi'' a$, $\varphi''' a \ldots \varphi' \alpha$, $\varphi'' \alpha$, $\varphi''' \alpha \ldots$ &c., en commençant par les fonctions de a,

Pour cela, ſoit conſtruite la courbe $K' Q' q'$ dont l'équation eſt $W = \alpha'$, α' étant tel que cette courbe paſſe par le point donne Q', ou qu'en feſant $x = \Pi$, on ait $y = \pi$; & par les points K', Q', $q' \ldots$ &c. ou elle coupe les projections horiſontales des courbes données, ſoient menées des perpendiculaires à l'axe AC, qui le rencontreront en des points p', π', $\tilde{\omega}' \ldots$, par leſquels ſoient élévées les verticales $p' N'$, $\pi' \mathcal{N}'$, $\tilde{\omega}' n'$, ... qu'on terminera aux projections verticales correſpondantes en N', $\mathcal{N}'$, $n' \ldots$ &c.

Soient auſſi élévées par les points K', Q', $q' \ldots$ des verticales qu'on terminera en μ', $\mathcal{M}'$, $m' \ldots$ aux courbes à double courbure correſpondantes. Cela fait, que l'on imagine par la courbe $K' Q' q' \ldots$ une ſurface cylindrique verticale, elle coupera la ſurface à conſtruire, ſuppoſée pour un inſtant conſtruite, en une courbe $\mu' \mathcal{M}' m'$, qui paſſera par le point donné E, & dont la projection verticale $N' \mathcal{N}' n'$ paſſera par les points déterminés $N' \mathcal{N}' n' \ldots$, en même tems que par le point E', projection verticale

du

du point E. Or, puiſque cette courbe eſt déterminée par les mêmes procédés que la courbe $N \mathcal{N} n$, & qu'elle n'en différe que parceque l'on a fait $W = \propto'$ au lieu de $W = \propto$, on aura ſon équation en mettant partout dans l'équation (B) $\propto'$ à la place de $\propto$. Soient donc $H'', K'', L'', M'', N'' \ldots V'', {}''k, {}''h, {}''l, m'', n'' \ldots$ &c. ce que deviennent les fonctions de x $H', K', L', M', N' \ldots V', {}'k, {}'h, {}'l, m', n' \ldots$ &c. en y mettant $\propto'$ à la place de $\propto$, & l'équation de la projection $N' \mathcal{N}' n'$ ſera

$$(C)\ z = H'' + \frac{K''}{{}''k}\left(F(fV'') - h'' - l''\varphi' a - m''\varphi'' a - n''\varphi''' a \ldots\right)$$

$+ L''\varphi'\propto' + M''\varphi''\propto' + N''\varphi'''\propto' \ldots$ &c. où les conſtantes, fonctions indéterminées de a ſont les mêmes que dans l'équation (B), mais où les fonctions de $\propto'$ doivent être telles que la courbe $N', \mathcal{N}', n'$ paſſe par les points $N', \mathcal{N}', n' \ldots$ &c.

Soit donc conſtruite la quantité $H'' + \frac{K''}{{}''k}(F(fV'') - {}''h)$ pour une valeur de $x = \Pi = AP$, & ſoit retranchée de $PE' (= \tilde{\omega})$ la droite dont cette quantité eſt l'expreſſion, pour avoir un premier reſte, que je repréſente par R, il eſt clair que l'on aura l'équation ſuivante

$$(D)\ R = \frac{K''}{{}''k}\left(- {}''l\varphi' a - m''\varphi'' a - n''\varphi''' a \ldots \text{\&c.}\right)$$

$+ L''\varphi'\propto' + M''\varphi''\propto' + N''\varphi'''\propto' \ldots$ &c.
x étant fait $= \Pi = AP$.

Soit conſtruite la même quantité $H'' + \frac{K'}{{}''k}(F(fV'') - h'')$

pour la valeur de $x = Ap'$, & qu'on la retranche de $p'N'$ pour avoir un ſecond reſte R', on aura une ſeconde équation.

$$(E)\ R' = \frac{K''}{k''} \left(-l'' \varphi' a - m'' \varphi'' a - n'' \varphi''' a \ldots \&c. \right)$$
$$+ L'' \varphi' \propto' + M'' \varphi'' \propto' + N'' \varphi''' \propto' \ldots \&c.$$
$$x \text{ étant fait} = A p'$$

On conſtruira la même quantité pour la valeur de $x = A \pi'$, & on la retranchera de $\pi' \mathcal{N}'$, ce qui donnera un troiſième reſte R'' & par conſéquent une troiſième équation

$$(F)\ R'' = \frac{K''}{k''} \left(-l'' \varphi' a - m'' \varphi'' a - n'' \varphi''' a \ldots \&c. \right)$$
$$+ L'' \varphi' \propto' + M'' \varphi'' \propto' + N'' \varphi''' \propto' \ldots \&c.$$
$$x \text{ étant fait} = A \pi'$$

On conſtruira la même quantité pour la valeur de $x = A\tilde{\omega}'$, on la retranchera de la verticale $\tilde{\omega}' n'$, ce qui donnera un quatrième reſte R''', & par conſéquent une quatrième équation.

$$(G)\ R''' = \frac{K''}{k''} \left(-l'' \varphi' a - m'' \varphi'' a - n'' \varphi''' a \ldots \&c. \right)$$
$$+ L'' \varphi' \propto' + M'' \varphi'' \propto' + N'' \varphi''' \propto' \ldots \&c.$$
$$x \text{ ètant fait} = A \tilde{\omega}'$$

En continuant ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'on ait opéré pour tous les points N', $\mathcal{N}'$, $n' \ldots \&c.$ dont le nombre eſt égal à celui des fonctions arbitraires φ', φ'', $\varphi''' \ldots \&c.$, on aura autant d'équations & une de plus qu'il y a d'indéterminées fonctions de $\propto'$ dans l'équation (*C*) ; on les eliminera, & il reſtera par conſéquent une première équation en $\varphi' a$, $\varphi'' a$, $\varphi''' a \ldots$ & conſtantes.

Il faut bien remarquer que les ſeconds membres des équations (*D*), (*E*), (*F*), (*G*) ... *&c.* ne ſont pas les mêmes quoi qu'il ſoient exprimés par les mêmes caractères, il ſont tous des conſtantes différentes, & on trouve le premier, en donnant à x la valeur $A P$, le ſecond, en feſant

$x = Ap^{i} \ldots$ *&c.* J'ai été obligé d'employer ici les mêmes caractères pour des quantités différentes, pour ne pas trop en multiplier la variété.

On construira la courbe $K'' Q'' q''$, dont l'équation est $W = \alpha''$, α'' étant tel que cette courbe passe par le point donné Q'', ou qu'en fesant $x = \Pi'$ on ait $y = \pi'$, par les points K'', Q'', $q'' \ldots$ *&c.* par lesquels elle coupera les projections horisontales des courbes données, on abbaissera des perpendiculaires à l'axe AC, qui le rencontreront aux points $p'' \pi'' \tilde{\omega}'' \ldots$ *&c.* par lesquels on élévera les verticales $p'' N''$, $\pi'' \mathcal{N}''$, $\tilde{\omega}'' n'' \ldots$ *&c.* qui détermineront les points N'', $\mathcal{N}''$ $n'' \ldots$ *&c.* On imaginera par la courbe $K'' Q'' q''$ une autre surface cylindrique verticale qui coupera la surface à construire dans une autre courbe $\mu'' M'' m''$, qui passera par le point donné F, & dont la projection verticale $N'' \mathcal{N}'' n''$ passera nécessairement par les points N'', $\mathcal{N}''$, $n'' \ldots$ *&c.* ainsi que par le point F'. On fera pour cette courbe les mêmes opérations que l'on a faites sur la courbe $N' \mathcal{N}'$, n', & l'on trouvera un même nombre d'équations analogues aux équations (D), (E), (F), $(G) \ldots$ en $\varphi' a$, $\varphi'' a$, $\varphi''' a \ldots \varphi' \alpha''$, $\varphi'' \alpha''$, $\varphi''' \alpha''$; on éliminera les fonctions de α'', & l'on aura une seconde équation en $\varphi' a$, $\varphi'' a$, $\varphi'' a \ldots$ & constantes.

On construira la courbe K''', $Q''' q'''$ dont l'équation est $W = \alpha'''$, α''' étant tel que cette courbe passe par le point donné Q''', & l'on fera pour elle les mêmes opérations que celles que l'on a faites pour les courbes $K' Q' q'$ & $K'' Q'' q''$, & l'on parviendra à une troisième équation en $\varphi' a$, $\varphi'' a$, $\varphi''' a \ldots$ & constantes.

En continuant ainſi de ſuite, on trouvera entre les quantités $\varphi' a$, $\varphi'' a$, $\varphi''' a \ldots$ &c. autant d'équations qu'il y a de points donnés Q', Q'', $Q''' \ldots$ &c., c'eſt-à-dire qu'il y a de fonctions arbitraires de W dans la propoſée, ou qu'il y a d'indéterminées fonctions de a dans l'équation (B). On pourra donc trouver la valeur de chacune d'elles en particulier, & les conſtruire toutes. Ainſi dans l'équation (B) il ne reſtera plus à déterminer que les fonctions indéterminées de α.

Or on a déjà vû que ces conſtantes doivent être telles que la courbe $N \mathcal{N} n$, à laquelle appartient cette équation, paſſe par les points déterminés N, $\mathcal{N}$, $n \ldots$ &c.

Soit donc conſtruite la quantité

$$H' - \frac{K'}{'k} \left(F(fV') - h' - l' \varphi' a - m' \varphi'' a - n' \varphi''' a \ldots \&c. \right)$$

pour la valeur de $x = Ap$, & après avoir mis à la place de $\varphi' a$, $\varphi'' a$, $\varphi''' a \ldots$ &c. leurs valeurs que l'on vient d'enſeigner à trouver. Soit retranchée la droite dont elle eſt l'expreſſion de la verticale pN, ce qui donnera un premier reſte que j'exprime par r, & l'on aura

$$r = L' \varphi' \alpha + M' \varphi'' \alpha + N' \varphi''' \alpha \ldots \&c.,$$
$$x \text{ étant fait } = Ap.$$

On conſtruira la même quantité pour une valeur de $x = A\pi$, on la retranchera de la verticale $\pi \mathcal{N}$, ce qui donnera un ſecond reſte r', & l'on aura une ſeconde équation

$$r' = L' \varphi' \alpha + M' \varphi'' \alpha + N' \varphi''' \alpha \ldots \&c.$$
$$x \text{ étant fait } = A\pi.$$

On conſtruira la même quantité pour la valeur de $x = A\tilde{\omega}$, on la retranchera de la verticale $\tilde{\omega} n$, ce qui donnera un troiſième reſte r'' & l'on aura une troiſième équation

$$r'' = L' \varphi' \alpha + M' \varphi'' \alpha + N' \varphi''' \alpha \ldots \&c.$$

x étant fait $= A \tilde{\omega}$.

En continuant ainſi de ſuite, on parviendra à avoir autant d'équations en $\varphi' \alpha$, $\varphi'' \alpha$, $\varphi''' \alpha$ ... &c. & conſtantes qu'il y a de points déterminés N, $\mathcal{N}$, n ... par leſquels doit paſſer la courbe $N \mathcal{N} n$, c'eſt-à-dire, autant qu'il y a de fonctions indéterminées de α dans l'équation (B). Il ſera donc poſſible de trouver la valeur de chacune d'elles en particulier, & les conſtruire; on pourra par conſéquent conſtruire l'équation (B), c'eſt-à-dire la courbe $N \mathcal{N} n$.

Enfin cette courbe étant conſtruite, on élévera par le point P la verticale $P M'$ qu'on terminera à la courbe $N \mathcal{N} n$, on fera $Q M = P M'$, & le point M ſera dans la ſurface demandée. C. Q. F. T. & D.

On me reprochera peut-être d'employer du calcul dans une conſtruction, ſur tout après avoir avancé qu'elle ſeroit poſſible, quand même il n'y auroit dans la propoſée aucun facteur analytique, mais j'ai été obligé d'avoir recours à ce moyen pour abréger des détails qui auroient conſidérablement allongé la deſcription des opérations, d'ailleurs le nombre des courbes qu'il eut fallu faire entrer dans la figure pour ſuppléer au calcul, l'eut tellement compliquée qu'il eut été difficile de s'y reconnoitre. Néant-moins toutes les opérations analytiques ne tombent que ſur les quantités que j'ai ſuppoſé analytiques au commencement de la conſtruction. De plus une droite, dont l'expreſſion n'eſt pas analytique, étant conſtruite, on peut en meſurer l'étenduë à l'aide d'une échelle, & la faire entrer dans le

calcul. J'avouë que ce moyen eſt peu géométrique & inuſité dans les conſtructions, & que ce problême ne peut-pas être conſtruit plus élégamment que par la méthode que j'ai expoſée dans la remarque qui ſuit la conſtruction du problême V.

Je pourrois donner ici, comme dans les problêmes précédens une ſeconde ſolution analytique, indépendante de la première, & tirée de la conſtruction, mais, après tout ce qui précéde, elle eſt trop facile pour que je m'y arête d'avantage.

SECOND MÉMOIRE

Sur le calcul intégral de quelques équations aux différences partielles.

PAR M.[r] MONGE.

Indépendamment de l'utilité du calcul intégral des équations aux différences partielles pour la détermination du mouvement des fluides & des vibrations des corps élaſtiques, cette eſpece de calcul eſt encore néceſſaire à la ſolution d'un grand nombre d'autres beaux problêmes, & particulièrement de ceux qui ont pour objet de trouver une ſurface courbe qui jouiſſe d'un *maximum* ou d'un *minimum.* Si l'on ſe propoſe, par exemple, de trouver en trois coordonnées l'équation de la ſurface courbe qu'il faut donner aux aîles d'un moulin à vent, pour que, muës par l'impulſion du vent, & parvenuës à l'uniformité de mouvement, elles aïent la plus grande vîteſſe poſſible, on parvient à une équation aux différences partielles qu'il faut intégrer afin d'avoir la rélation demandée entre les trois coordonnées. Il en eſt de même pour l'équation de la ſurface de moindre réſiſtance; car les ſolutions que l'on a données juſqu'à préſent du ſolide de moindre réſiſtance ſont imparfaites, & ne peuvent être d'ailleurs d'aucune utilité pour la conſtruction des vaiſſeaux. On a toujours, en effet, ſuppoſé 1.° que ce ſolide étoit un ſolide de révolution, 2.° qu'il étoit entièrement ſubmergé par le fluide réſiſtant, hypothêſes qui ne peuvent pas avoir lieu dans la pratique. Pour que l'on pût rétirer quelqu'avantage de la ſolution de ce problême, voici comme il faudroit l'énoncé.

Etant données la maitreſſe couple d'un vaiſſeau, ou ſa coupe en travers dans l'endroit où il eſt le plus gros, & ſa coupe horiſontale par le plan de la ſurface de l'eau, trouver parmi toutes les ſurfaces courbes qui peuvent paſſer par ces deux courbes données, continues ou diſcontinues, celle qui, müe par l'action du vent ſur les voiles, & parvenue à l'uniformité de mouvement, ait la plus grande vîteſſe uniforme. Mais ce problême dépend de l'intégration d'une équation aux différences partielles, très compliquée, & que juſqu'à préſent j'ai vainement eſſayé de traiter.

Il faut cependant être de bonne foi, & convenir que les ſolutions des deux problêmes précédens ne ſont pas de toute l'utilité dont elles paroiſſent à l'inſpection. En effet la nature de la ſurface de l'aîle d'un moulin à vent, dépend de la vîteſſe du vent que je ſuppoſe uniforme & de la réſiſtance qu'apportent le frottement des menſes & des autres parties de la machine au mouvement de l'arbre, or ces quantités ſont ſujettes à des variations qu'il n'eſt pas poſſible de ſoumettre au calcul; d'où il ſuit que la ſurface qui donneroit le *maximum* de vîteſſe uniforme pour une certaine vîteſſe abſolue du vent, ne le donneroit plus pour une vîteſſe un peu moindre ou plus grande. De même la nature de la ſurface de moindre réſiſtance eſt aſſujétie à la vîteſſe du vent, à la direction du mouvement du vaiſſeau, à la nature de ſa coupe horiſontale par le plan de la ſurface de l'eau &c. or la vîteſſe du vent ne peut pas être ſuppoſée conſtante, du moins pendant un tems conſidérable, les oſcillations du vaiſſeau apportent des changemens inévitables & très prompts dans la coupe horiſontale; les inégalités de vîteſſe du vent, la manière variable dont il agit ſur les voiles ſujettes à différens mouvements, quand même elles auroient toujours la même poſition par rapport au vaiſſeau, empechent que l'on puiſſe regarder la direction de ſon mouve-

ment

ment comme conſtante ; d'où il faut conclure que la ſurface qui ſatisferoit au *maximum* de viteſſe uniforme pour un inſtant, n'y ſatisferoit plus dans l'inſtant ſuivant, ou du moins que cette ſurface ne pourroit être la même que pendant un tems peu-conſidérable.

Si ces conſidérations ſont capables de nous conſoler de l'impoſſibilité ou nous ſommes pour ainſi dire de réſoudre complétement de pareils problêmes, elles ne doivent néanmoins pas nous empêcher de faire tous nos efforts pour vaincre les obſtacles, qui ſe préſentent ; d'ailleurs comme ces obſtacles ne conſiſtent que dans des difficultés d'analyſe, on peut en les ſurmontant ſe frayer une route à la ſolution de problêmes plus utiles.

Dans un mémoire que j'ai déjà eu l'honneur de préſenter à l'Académie ſur le calcul intégral des équations aux différentielles partielles, j'ai donné la manière de trouver comment la quantité z doit être fonction de x & de y pour ſatisfaire à cette équation

$$\frac{\delta^m z}{dx^m}+A\frac{\delta^{m-1} d z}{dx^{m-1}d y}+B\frac{\delta^{m-2}d d z}{d x^{m-2}d y^2}+C\frac{\delta^{m-3} d^3 z}{d x^{m-3}d y^3}\dots \&c.=K,$$

δ étant la caractériſtique d'une différentielle priſe en ne feſant varier que x, & d celle d'une différentielle priſe en ne feſant varier que y ; les coefficiens A, B, C ... &c. étant conſtants, & le ſecond membre K étant compoſé par voie d'addition ou de ſouſtraction, d'un nombre quelconque de quantités de ces formes $y^m F\cdot x$, $x^m F'\cdot y$ ou plus généralement de ces formes $y^m\,\varphi\,(a x-y)$, $x^m\,\varphi'(a x-y)$. Je vais actuellement intégrer en quantités finies quelques équations de la même forme, en ſuppoſant que les facteurs A, B, C ... &c. ſoient certaines fonctions de x & y, & particulièrement celle-ci

$$x^m\frac{\delta^m z}{dx^m}+mx^{m-1}y\frac{\delta^{m-1}d z}{dx^{m-1}dy}+m\cdot\frac{m-1}{2}x^{m-2}y^2\frac{\delta^{m-2}d d z}{dx^{m-2}dy^2}\dots \&c.=K,$$

K étant compoſé de la ſomme ou de la différence d'un nombre quelconque de quantités telles que

$y^m \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, $x^m \Psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

Pour ſuivre un certain ordre, & oppoſer avec plus de clarté le détail des opérations, je vais commencer par des équations moins générales, c'eſt-à-dire où l'expoſant m ſera déterminé.

PROBLÊME I.

Intégrer ou réduire à un ordre moindre d'une unité l'équation

$$x^3\frac{\delta^3 z}{dx^3}+3x^2y\frac{\delta\delta dz}{dx^2dy}+3xy^2\frac{\delta ddz}{dxdy^2}+y^3\frac{d^3z}{dy^3}=0$$

Solution.

Soit fait $x^2\frac{\delta\delta z}{dx^2}+2xy\frac{\delta dz}{dxdy}+y^2\frac{ddz}{dy^2}=V$, & ſoit différentiée cette équation par rapport à x, & par rapport à y, ce qui donnera

$$x^2\frac{\delta^3 z}{dx^2}=dV-2xy\frac{\delta\delta dz}{dxdy}-y^2\frac{\delta ddz}{dy^2}-2x\frac{\delta\delta z}{dx}-2y\frac{\delta dz}{dy}$$

$$\& \; y^2\frac{d^3z}{dy^2}=dV-x^2\frac{\delta\delta dz}{dx^2}-2xy\frac{\delta ddz}{dxdy}-2x\frac{\delta dz}{dx}-2y\frac{ddz}{dy}$$

on multipliera la première de ces équations par $\frac{x}{dx}$ la ſeconde par $\frac{y}{dy}$ & l'on ſubſtituera à la place de $x^3\frac{\delta^3 z}{dx^3}$ & de $y^3\frac{d^3z}{dy^3}$ leurs valeurs, ce qui donnera

$$\left.\begin{array}{l} x\frac{\delta V}{dx} - 2x^2y\frac{\delta\delta dz}{dx^2dy} - xy^2\frac{\delta ddz}{dxdy^2} - 2x^2\frac{\delta\delta z}{dx^2} - 2xy\frac{\delta dz}{dxdy} \\ \quad + 3x^2y\frac{\delta\delta dz}{dx^2dy} + 3xy^2\frac{\delta ddz}{dxdy^2} \\ + y\frac{dV}{dy} - x^2y\frac{\delta\delta dz}{dx^2dy} - 2xy^2\frac{\delta ddz}{dxdy^2} \ldots - 2xy\frac{\delta dz}{dxdy} - 2y^2\frac{ddz}{dy^2} \end{array}\right\} = 0$$

ou bien en réduiſant $x\frac{\delta V}{dx} + y\frac{dV}{dy} = 2V$, équation dont l'intégrale donnéra celle de la propoſée.

Pour intégrer cette dernière équation, ſuppoſons que la quantité V ſoit telle que l'on ait $dV = p\,dx + q\,dy$: on aura $px + qy = 2V$, & par conſéquent

$$dV = p\,dx + \frac{2V\,dy}{y} - \frac{px}{y}\,dy$$

que l'on peut mettre ſous cette forme

$$\frac{dV}{V} = \frac{py}{V}\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right) + \frac{2\,dy}{y}$$

or les deux termes $\frac{dV}{V}$ & $\frac{2\,dy}{y}$ étant des différentielles logarithmiques, & l'autre terme $\frac{py}{V}\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right)$ étant multiple de $d.\frac{x}{y}$, cette équation ne peût-être intégrable que ce terme ne ſoit la différentielle logarithmique de quelque fonction de $\frac{x}{y}$; ſoit repréſenté cette fonction par $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, on aura donc

$$\text{Log. } V = \text{log. } \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + 2\text{ log. } y^2 \text{ ou } V = y^2\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

on néglige ici la conſtante par ce que le caractère arbitraire φ la comporte.

Donc l'intégrale de la propoſée ſera

$$x^2 \frac{\delta\delta z}{dx^2} + 2xy \frac{\delta d z}{dx\,dy} + y^2 \frac{ddz}{dy^2} = y^2 \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

C. Q. F. T.

PROBLÈME II

Intégrer, ou réduire à une équation différentielle du premier ordre l'équation

$$x^2 \frac{\delta\delta z}{dx^2} + 2xy \frac{\delta d z}{dx\,dy} + y^2 \frac{ddz}{dy^2} = y^2 \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

Solution

Soit fait $x \frac{\delta z}{dx} + y \frac{dz}{dy} = V$, équation que l'on différentiera par rapport à x, & par rapport à y, pour avoir

$$x \frac{\delta\delta z}{dx} = \delta V - \delta z - y \frac{\delta d z}{dy}$$

$$\& \; y \frac{ddz}{dy} = dV - x \frac{\delta d z}{dy} - dz\,.$$

on multipliera la première de ces équations par $\frac{x}{dx}$ la seconde par $\frac{y}{dy}$, & l'on substituera dans la proposée, à la place de $x^2 \frac{\delta\delta z}{dx^2}$ & de $y^2 \frac{ddz}{dy^2}$ leurs valeurs, ce qui donnera, toute reduction faite, la transformée

$$x \frac{\delta V}{dx} + y \frac{dV}{dy} = V + y^2 \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

Pour intégrer cette équation, soit V telle que l'on ait $dV = p\,dx + q\,dy$, on aura $px + qy = V + y^2 \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$

& par conséquent

$$dV = p\,dx + \frac{V\,dy}{y} + y\,dy\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right) - p\,x\,\frac{dy}{y},$$ que l'on peût mettre sous cette forme $dV = p\,y\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right)$

$$+ \frac{V\,dy}{y} + y\,dy\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

ou $\frac{y\,dV - V\,dy}{y^2} = p\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right) + dy\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$.

Soit actuellement φ' le coefficient de la différentielle de φ, de manière que ω étant une variable quelconque, on ait $d\,\varphi\,\omega = \varphi'\,\omega\,d\,\omega$. Cela posé, on remarquera que le premier membre de la dernière équation est la différentielle complête de $\frac{V}{y}$, de plus que le terme $dy\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ est $= d\left(y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\right) - y\,\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)d\left(\frac{x}{y}\right)$ ou $= d\left(y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\right)$ $- y\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right)$ d'ou il suit que cette équation peût se transcrire ainsi

$$d\,\frac{V}{y} = \left(p - y\,\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\right)\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right) + d\left(y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\right)$$

or le second membre de cette équation ne peût-être une différentielle complête, que son premier terme ne soit la différentielle d'une fonction de $\frac{x}{y}$; donc si l'on représente cette nouvelle fonction par le caractère Ψ, l'intégrale de la transformée sera

$$\frac{V}{y} = \Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y\varphi\left(\frac{x}{y}\right) \text{ ou } V = y\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^2\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

donc on aura pour intégrale de la proposée

$$x\,\frac{\delta z}{dx} + y\,\frac{\delta z}{dy} = y\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^2\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

C. Q. F. T.

PROBLEME III.

Intégrer l'équation $x \frac{\delta z}{dx} + y \frac{dz}{dy} = y \Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^2 \phi\left(\frac{x}{y}\right)$

Solution.

Soit, comme dans les problêmes précédens $dz = p\,dx + q\,dy$, ce qui donne

$$px + qy = y \Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^2 \phi\left(\frac{x}{y}\right)$$

on aura $dz = p\,dx + \Psi\left(\frac{x}{y}\right) dy + y\phi\left(\frac{x}{y}\right) dy - \frac{px}{y}\,dy$

ou $dz = py\left\{\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right\} + \Psi\left(\frac{x}{y}\right) dy + y\phi\left(\frac{x}{y}\right) dy$.

Mais on a $\Psi\left(\frac{x}{y}\right) dy = d\left(y\Psi\left(\frac{x}{x}\right)\right) - y\psi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right)$

& $y\phi\left(\frac{x}{y}\right) dy = d\left(\frac{y^2}{2}\phi\left(\frac{x}{y}\right)\right) - \frac{y^2}{2}\phi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right)$

Donc en substituant ces valeurs on aura

$$dz = \left\{py - y\psi'\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{2}y^2\phi'\left(\frac{x}{y}\right)\right\}\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right)$$
$$+ d\left(y\psi\left(\frac{x}{y}\right)\right) + d\left(\frac{1}{2}y^2\phi\left(\frac{x}{y}\right)\right)$$

Or les deux derniers termes de cette équation sont des différentielles completes, & le premier terme du second membre, étant multiple de $\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right)$ ne peût être la différentielle que d'une fonction de $\frac{x}{y}$; donc si l'on représente cette fonction par F, l'intégrale de la proposée sera

$$z = F\cdot\left(\frac{x}{y}\right) + y\psi\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{2}y^2\phi\left(\frac{x}{y}\right) \qquad \text{C. Q. F. T.}$$

Corollaire.

Il ſuit des ſolutions de ces trois problêmes, que l'intégrale finie de l'équation du troiſiéme dégré

$$x^3\frac{\delta^3 z}{dx^3}+3x^2y\frac{\delta\delta d z}{dx^2 dy}+3xy^2\frac{\delta dd z}{dx dy^2}+y^3\frac{d^3 z}{dy^3}=0$$

eſt $z=F\cdot\left(\frac{x}{y}\right)+y\psi\left(\frac{x}{y}\right)+y^2\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$

le diviſeur 2 de la fonction φ diſparoit ici, par ce que cette fonction eſt arbitraire, au lieu que dans le problême précédent elle étoit déterminée & donnée par l'enoncé de la queſtion.

La méthode que je viens d'employer pour avoir l'intégrale finie de cette équation du troiſième dégré, s'applique avec le même ſuccès aux équations de même forme, & des dégrés ſuperieurs.

PROBLEME IV.

Intégrer ou réduire à un ordre moindre d'une unité l'équation générale

$$x^m\frac{\delta^m z}{dx^m}+m\cdot x^{m-1}y\frac{\delta^{m-1} d z}{dx^{m-1}dy}+m\cdot\frac{m-1}{2}x^{m-2}y^2\frac{\delta^{m-2} d d z}{dx^{m-2} dy^2}\ldots\&c.=0$$

Solution.

Soit fait, comme dans le problême premier.

$$x^{m-1}\frac{\delta^{m-1}z}{dx^{m-1}}+(m-1)x^{m-2}y\frac{\delta^{m-2} d z}{dx^{m-2}dy}+(m-1)\frac{m-2}{2}x^{m-3}y^2\frac{\delta^{m-3}ddz}{dx^{m-3}dy^2}\ldots\&c.=V,$$

Soit différentiée cette équation par rapport à x, & par rapport à y, pour avoir les valeurs ſuivantes

$$\frac{x^m \delta^m z}{dx^m} = \begin{cases} \frac{x\,\delta V}{dx} - (m-1)\, x^{m-1} y \frac{\delta^{m-1} dz}{dx^{m-1} dy} \\ -(m-1)\left(\frac{m-2}{2}\right) x^{m-2} y^2 \frac{\delta^{m-2} d\,dz}{dx^{m-2} dy^2} \ldots\ldots \&c. \\ -(m-1)\, x^{m-1} \frac{\delta^{m-1} z}{dx^{m-1}} - (m-1)(m-2) x^{m-2} y \frac{\delta^{m-2} dz}{dx^{m-2} dy} \\ -(m-1)\left(\frac{m-2}{2}\right)(m-3)\, x^{m-3} y^2 \frac{\delta^{m-3} d\,dz}{dx^{m-3} dy^2} \ldots\ldots \end{cases}$$

&

$$\frac{y^m d^m z}{dy^m} = \begin{cases} \frac{y\,dV}{dy} - x^{m-1} y \frac{\delta^{m-1} dz}{dx^{m-1} dy} - (m-1) x^{m-2} y^2 \frac{\delta^{m-2} d\,dz}{dx^{m-2} dy^2} \ldots \&c. \\ -(m-1) x^{m-2} y \frac{\delta^{m-2} dz}{dx^{m-2} dy} - 2(m-1)\left(\frac{m-2}{2}\right) x^{m-3} y^2 \frac{\delta^{m-3} d\,dz}{dx^{m-3} dy^2} \ldots \&c. \end{cases}$$

On ſubſtituera ces deux valeurs dans la propoſée, ou ce qui revient au même, on ajoutera enſemble les ſeconds membres de ces deux égalités, & on ajoutera à leur ſomme les autres termes de la propoſée, qui ſont

$$m \cdot x^{m-1} y \frac{\delta^{m-1} dz}{dx^{m-1} dy} + m\left(\frac{m-1}{2}\right) x^{m-2} y^2 \frac{\delta^{m-2} d\,dz}{dx^{m-2} dy^2} \ldots\ldots \&c.$$

Cela fait, on remarquera dans cette ſomme deux eſpeces de ſuites, les unes contiennent des différentielles de z du dégré m, & les autres des différentielles de z du dégré $m-1$. Or la ſomme de toutes les premières ſe reduit à zéro; en effet la ſomme des coefficiens du terme

$$x^{m-1} y \frac{\delta^{m-1} dz}{dx^{m-1} dy} \text{ eſt} = m - (m-1) - 1 = 0$$

celle de $x^{m-2} y^2 \frac{\delta^{m-2} d\,dz}{dx^{m-2} dy^2}$ eſt $= m\left(\frac{m-1}{2}\right) - (m-1)\left(\frac{m-2}{2}\right) - (m-1) = 0$

& ainſi de ſuite pour les autres termes du même ordre, quant aux autres ſuites, il eſt facile de les reduire, en remarquant 1° que tous les termes ſont multipliés par

$(m-1)$

$(m-1)$ 2° qu'en les divifant par $(m-1)$, le coëfficient du terme $x^{m-1}\frac{\delta^{m-1}z}{dx^{m-1}}$ eft $= -1$

celui du terme $x^{m-2}y\frac{\delta^{m-2}dz}{dx^{m-2}dy}$ eft $= -(m-2) - 1 = -(m-1)$

celui du terme $x^{m-3}y^2\frac{\delta^{m-3}ddz}{dx^{m-3}dy^2}$ eft

$$= -\left(\frac{m-2}{2}\right)(m-3) - 2\left(\frac{m-2}{2}\right) = -(m-1)\left(\frac{m-2}{2}\right)$$

& en continuant ainfi de fuite, on trouvera que tous les coëfficiens font les mêmes, que ceux des termes correfpondans de la valeur de V, multipliés par $-(m-1)$, d'où il fuit que la transformée fera

$$x\frac{\delta V}{dx} + y\frac{dV}{dy} - (m-1)V = 0$$

Or en intégrant cette équation comme celle du problême premier, on trouve $V = y^{m-1}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, donc l'intégrale première de la propofée fera $x^{m-1}\frac{\delta^{m-1}z}{dx^{m-1}} + (m-1)x^{m-2}y\frac{\delta^{m-2}dz}{dx^{m-2}dy}$ $+ (m-1)\left(\frac{m-2}{2}\right)x^{m-3}y^2\frac{\delta^{m-3}ddz}{dx^{m-3}dy^2} \ldots$ &c. $= y^{m-1}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ équation qui eft de la même forme que la propofée, excepté que le fecond membre au lieu d'être $= 0$ eft $= y^{m-1}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$

C. Q. F. T.

PROBLÊME V.

Intégrer ou reduire à un ordre moindre d'une unité l'équation

$$x^n \frac{\delta^n z}{dx^n} + n x^{n-1} y \frac{\delta^{n-1} dz}{dx^{n-1} dy} + n\left(\frac{n-1}{2}\right) x^{n-2} y^2 \frac{\delta^{n-2} ddz}{dx^{n-2} dy^2} \ldots\ldots \&c.$$

$$= y^n \varphi \left(\frac{x}{y}\right)$$

Solution.

On fera, comme dans le problême précédent.

$$x^{n-1} \frac{\delta^{n-1} z}{dx^{n-1}} + (n-1) x^{n-2} y \frac{\delta^{n-2} dz}{dx^{n-2} dy} + (n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right) x^{n-3} y^2 \frac{\delta^{n-3} d dz}{dx^{n-3} dy^2} \ldots \&c.$$

$$= V'$$

& en opérant de la même manière on transformera la propoſée en celle ci

$$x \frac{\delta V'}{dx} + y \frac{dV'}{dy} = (n-1) V' + y^n \varphi \left(\frac{x}{y}\right)$$

Soit actuellement V' telle que l'on ait $dV' = p\,dx + q\,dy$, on aura $px + qy = V'(n-1) + y^n \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ & par conſéquent

$dV' = p\,dx + (n-1) V' \frac{dy}{y} + y^{n-1} \varphi \left(\frac{x}{y}\right) dy - \frac{px}{y} dy$ ou bien $y\,dV' - (n-1) V' dy = py^2 \left(\frac{ydx - xdy}{y^2}\right) + y^n \varphi \left(\frac{x}{y}\right) dy$ cela poſé, on rendra le premier membre différentielle complete en le multipliant par $\frac{1}{y^n}$ ou, ce qui eſt la même choſe, par $\frac{y^{n-2}}{y^{2(n-1)}}$, car alors il deviendra $\frac{y^{n-1}\, dV' - (n-1) V' y^{n-2}\, dy}{y^{2(n-1)}}$ ou $d\left(\frac{V'}{y^{n-1}}\right)$; ainſi en diviſant auſſi le ſecond membre par y^n, on aura $d\left(\frac{V'}{y^{n-1}}\right) = py^{2-n}\left(\frac{ydx - xdy}{y^2}\right) + \varphi\left(\frac{x}{y}\right) dy$; ou par

ce que l'on a $\varphi\left(\frac{x}{y}\right) dy = d\left) y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right) - y\,\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\right.$ $\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right)$, la transformèe deviendra $d\left(\frac{V'}{y^{n-1}}\right)$ $=\left(p\,y^{2-n} - y\,\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\right)\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right) + d\left(y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\right)$, équation dont l'intégrale eſt $\frac{V'}{y^{n-1}} = \Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, en multipliant par y^{n-1}, $V' = y^{n-1}\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^n\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$. Donc l' intégrale de la propoſée ſera

$$x^{n-1}\frac{\delta^{n-1}z}{dx^{n-1}} + (n-1)x^{n-2}y\frac{\delta^{n-2}\,dz}{dx^{n-2}dy} + (n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right)x^{n-3}y^2\frac{\delta^{n-3}\,d\,dz}{dx^{n-3}dy^2}\ldots\&c.$$

$$= y^{n-1}\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^n\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

C. Q. F. T.

Corollaire I.

Si le ſecond membre de la propoſée, au lieu d'être $y^n\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ étoit $x^n\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ l'intégrale ſe trouveroit de la même manière, car on a $x^n\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right) = y^n \cdot \frac{x^n}{y^n}\varphi\left(\frac{x}{y}\right) = y^n f\cdot\left(\frac{x}{y}\right)$ donc il ſuffiroit de changer dans l'intégrale précédente la fonction donnée φ en une autre qui ſeroit ſon produit par $\frac{x^n}{y^n}$.

Corollaire II.

Si dans la propoſée du problême précédent on fait $n = m - 1$, on aura l' intégrale du problème IV, donc l' équation

$$x^{m-2}\frac{\delta^{m-2}z}{dx^{m-2}} + (m-2)\,x^{m-3}\,y\frac{\delta^{m-3}\,d\,z}{dx^{m-3}dy}\ldots\&c. = y^{m-2}\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$+\,y^{m-1}\,\varphi\,\left(\frac{x}{y}\right)$$

eſt l'intégrale ſeconde de l'équation du problême IV.

PROBLÊME VI.

Intégrer ou reduire à un ordre moindre d'une unité l'équation

$$x^k\,\frac{\delta^k z}{dx^k} + k\,x^{k-1}y\frac{\delta^{k-1}\,d\,z}{dx^{k-1}\,dy} + k\,\left(\frac{k-1}{2}\right)x^{k-2}y^2\,\frac{\delta^{k-2}d\,d\,z}{dx^{k-2}dy^2}\ldots\&c.$$
$$= y^k\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{k+1}\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

Solution.

Soit fait $x^{k-1}\frac{\delta^{k-1}z}{dx^{k-1}} + (k-1)\,x^{k-2}\,y\,\frac{\delta^{k-2}\,dz}{dx^{k-2}dy}\ldots\&c. = V''$ & l'on aura la transformée

$$x\,\frac{\delta V''}{d\,x} + y\,\frac{dV''}{d\,y} = (k-1)\,V'' + y^k\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{k+1}\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right),$$

donc l'intégrale, par la méthode du problême précédent, ſe trouve

$$V'' = y^{k-1}\,F\left(\frac{x}{y}\right) + y^k\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{2}\,y^{k+1}\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

donc l'intégrale de la propoſée ſera

$$x^{k-1}\frac{\delta^{k-1}z}{dx^{k-1}} + (k-1)\;x^{k-2}y\;\frac{\delta^{k-2}d\,z}{dx^{k-2}dy}\ldots\&c. = y^{k-1}\,F\,\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$+\,y^k\,\Psi\,\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{2}\,y^{k+1}\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

C. Q. F. T.

Corollaire.

La proposée étant l'intégrale seconde de l'équation générale du problême IV dans laquelle on a fait $k = m-2$, il suit que l'intégrale troisième de cette équation sera

$$x^{m-3}\frac{\delta^{m-3}z}{dx^{m-3}} + (m-3)x^{m-4}y\frac{\delta^{m-4}dz}{dx^{m-4}dy}\ldots\&c. = y^{m-3}F\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$+ y^{m-2}\Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{m-1}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

Le diviseur 2 de la fonction φ est compris dans cette fonction qui est ici arbitraire, au lieu que dans le problême précédent elle est déterminée & donnée dans l'énoncé.

Conclusion

En continuant ces opérations, il est facile de reconnoitre que l'équation générale

$x^m\frac{\delta^m z}{dx^m} + m\,x^{m-1}\frac{\delta^{m-1}dz}{dx^{m-1}dy}\ldots\&c = 0$ a pour intégrale finie

$$z = f\cdot\left(\frac{x}{y}\right) + y f'\left(\frac{x}{y}\right) + y^2 f''\left(\frac{x}{y}\right)\ldots + y^{m-3}F\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$+ y^{m-2}\Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{m-1}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

les fonctions $f, f', f''\ldots F$, Ψ & φ étant arbitraires & indépendantes les unes des autres & leur nombre étant $= m$.

Jusque ici j'ai supposé que le second membre de la proposée générale fût $= 0$, mais on peut encore l'intégrer même en quantités finies, lorsqu'il est composée d'une certaine manière de x & de y comme on va le voir dans les problêmes suivans.

PROBLÊME VII.

Intégrer en quantités finies l'équation générale
$$x^m \frac{\delta^m z}{dx^m} + m x^{m-1} y \frac{\delta^{m-1} dz}{dx^{m-1} dy} \ldots \&c. = Y \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + Y' \Psi\left(\frac{x}{y}\right)$$
les quantités Y & Y' étant des fonctions quelconques & données de y, & les fonctions φ & Ψ étant aussi données.

Solution

I

On intégrera d'abord une fois cette équation, comme celles des problêmes précédens ; pour cela on fera
$$x^{m-1} \frac{\delta^{m-1} z}{dx^{m-1}} + (m-1) x^{m-2} y \frac{\delta^{m-2} dz}{dx^{m-2} dy} \ldots \&c. = V$$
ce qui donnera pour transformée
$$x \frac{\delta V}{dx} + y \frac{dV}{dy} = (m-1) V + Y \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + Y' \Psi\left(\frac{x}{y}\right)$$
& par conséquent, en fesant $dV = p\,dx + q\,dy$
$$px + qy = (m-1) V + Y \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + Y' \Psi\left(\frac{x}{y}\right)$$
ou $y\,dV - (m-1) V\,dy = p y^2 \left(\frac{y dx - x dy}{y^2}\right) + Y\,dy\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$
$+ Y'\,dy\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right)$ on divisera tout par y^m, pour rendre le premier membre différentielle complete, ce qui donnera $\frac{y^{m-1} dV - (m-1) V y^{m-2} dy}{y^{2(m-1)}} = p y^{2-m} \left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right)$
$+ \frac{Y dy}{y^m} \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{Y' dy}{y^m} \Psi\left(\frac{x}{y}\right)$ cela fait, on remarquera que l'on a
$$\frac{dy}{y^m} \varphi\left(\frac{x}{y}\right) = d\left(\varphi\left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{Y}{y^m} dy\right) - \int \frac{Y dy}{y^m} \cdot \varphi'\left(\frac{x}{y}\right) \left(\frac{y dx - x dy}{y^2}\right)$$

φ' étant la coefficient de la différentielle de φ . on a de même

$$\frac{Y'\,dy}{y^m}\Psi\left(\frac{x}{y}\right)=d\left(\Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{Y'dy}{y^m}\right)-\Psi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}\right)$$

$\int\frac{Y'dy}{y^m}$; d'où il fuit qu'en fefant pour abréger

$p\,y^{2-m}-\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{Ydy}{y^m}-\Psi'\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{Y'dy}{y^m}=K$, l'équation précédente fe peût-mettre fous cette forme

$$d\left(\frac{V}{y^{m-1}}\right)=K\left(\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}\right)+d\left(\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{Y\,dy}{y^m}\right)$$

$+\,d\left(\Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{Y'\,dy}{y^m}\right)$ dont l'intégrale ne peut-être que

$$\frac{V}{y^{m-1}}=F\left(\frac{x}{y}\right)+\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{Ydy}{y^m}+\Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{Y'dy}{y^m}.$$

Donc l'intégrale première de la propofée fera

$$x^{m-1}\,\frac{\delta^{m-1}z}{d\,x^{m-1}}+(m-1)\,x^{m-2}\,y\,\frac{\delta^{m-2}dz}{dx^{m-1}dy}\;\ldots\;\&c.=y^{m-1}\,F\left(\frac{x}{y}\right)$$

$+\,y^{m-1}\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{Ydy}{y^m}+y^{m-1}\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{Y'dy}{y^m}$ dans laquelle la fonction F eft arbitraire, les autres fonctions φ & Ψ étant données dans l'énoncé.

11

Cette intégrale eft precifement de la même forme que la propofée, d'où il fuit qu'on l'intégrera de la même manière, & l'on aura pour intégrale feconde

$$x^{m-2}\,\frac{\delta^{m-2}z}{dx^{m-2}}+(m-2)\,x^{m-3}y\,\frac{\delta^{m-3}dz}{dx^{m-3}dy}\;\ldots\;\&c.=y^{m-2}F'\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$+\,y^{m-1}F\left(\frac{x}{y}\right)+y^{m-2}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int dy\int\frac{Ydy}{y^m}+y^{m-2}\Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int dy\int\frac{Y'\,dy}{y^m}$$

III

On intégrera encore cette équation de la même manière, & l'on trouvera pour intégrale troisième

$$x^{m-3}\ \frac{\delta^{m-3}z}{dx^{m-3}}\cdots \&c. = y^{m-3}F''\left(\frac{x}{y}\right) + y^{m-2}F'\left(\frac{x}{y}\right) + y^{m-1}F\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$+ y^{m-3}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int dy\int dy\int\frac{\Upsilon dy}{y^m} + y^{m-3}\ \Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int dy\int dy\int\frac{Y'\,dy}{y^m}$$

où l'on remarquera que la fonction F devroit être divisée par 2, mais comme cette fonction est arbitraire, de même que F' & F'', elle comporte toute sorte de coëfficiens constans.

IV

Il est facile actuellement de conclure par analogie que l'intégrale finie de la proposée est

$$z = f\left(\frac{}{y}\right) + yf'\left(\frac{x}{y}\right) + y^2f''\left(\frac{x}{y}\right)\ \cdots\cdots + y^{m-3}\ F''\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$+ y^{m-2}\ F'\left(\frac{x}{y}\right) + y^{m-1}\ F\left(\frac{x}{y}\right) + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int^m\frac{\Upsilon dy_m}{y^m}$$

$$+ \Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int^m\frac{\Upsilon' dy^m}{y^m}.$$

C. Q. F. T.

PROBLÊME VIII.

Intégrer en quantités finies l'équation générale

$$x^m\frac{\delta^m z}{dx^m} + m\,x^{m-1}\ y\ \frac{\delta^{m-1}\,d\,z}{dx^{m-1}dy}\cdots \&c. = X\varphi\left(\frac{x}{y}\right) + X'\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right)$$

les quantités X & X' étant des fonctions données de x.

Solution.

On fera la même transformation que dans le problême précédent, & l'on aura

px

$$p x + q y = (m-1) V + X \varphi \left(\frac{x}{y}\right) + X' \Psi \left(\frac{x}{y}\right)$$

cela fait au lieu d'éliminer q, on éliminera p, ce qui donnera, (en mettant ſa valeur dans $dV = p\,dx + q\,dy$)

$$x\,dV - (m-1) V\,dx = -q y^2 \left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right) + X dx \varphi \left(\frac{x}{y}\right)$$

$+ X' dx \Psi \left(\frac{x}{y}\right)$ on diviſera tout par x^m pour rendre le premier membre, différentielle compléte, & l'on aura

$$\frac{x^{(m-1)}\,dV - (m-1) V x^{m-2}\,dx}{x^{2(m-1)}} = \frac{-qy^2}{x^m} \left(\frac{ydx - xdy}{y^2}\right) + \frac{Xdx}{x^m} \varphi \left(\frac{x}{y}\right)$$

$+ \frac{X'dx}{x^m} \Psi \left(\frac{x}{y}\right)$ or on a $\frac{X\,dx}{x^m} \varphi \left(\frac{x}{y}\right) = d \left(\varphi \left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{Xdx}{x^m}\right)$
$- \varphi' \left(\frac{x}{y}\right) \left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right) \int \frac{X'dx}{x^m}$ de même $\frac{X'dx}{x^m} \Psi \left(\frac{x}{y}\right)$
$= d\left(\Psi \left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{X'dx}{x^m}\right) - \Psi' \left(\frac{x}{y}\right) \left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right) \int \frac{X'dx}{x^m}$, par conſéquent, en repréſentant par K la quantité
$- \frac{qy^2}{x^m} - \varphi' \left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{Xdx}{x^m} - \Psi \left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{X'dx}{x^m}$ l'équation précédente deviendra $d \left(\frac{V}{x^{m-1}}\right) = K \left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right)$
$+ d \left(\varphi \left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{Xdx}{x^m}\right) + d \left(\Psi \left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{X'\,dx}{x^m}\right)$ dont l'intégrale ne peut-être que $\frac{V}{y^{m-1}} = F \left(\frac{x}{y}\right) + \varphi \left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{X\,dx}{x^m}$
$+ \Psi \left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{X'dx}{x^m}$, donc l'intégrale première de la propoſée ſera $x^{m-1} \frac{\delta^{m-1} z}{d x^{m-1}} + (m-1) x^{m-2} y \frac{\delta^{m-2} dz}{dx^{m-2} dy} \ldots$ &c. $= x^{m-1} F \left(\frac{x}{y}\right)$
$+ x^{m-1} \varphi \left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{Xdx}{x^m} + x^{m-1} \Psi \left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{X'\,dx}{x^m}$. Mais cette intégrale eſt de la même forme que la propoſée, on l'intégrera par conſéquent de la même maniére, & en con-

tinuant ainſi de ſuite, on parviendra à l'intégrale finie qui eſt

$$z = f\left(\frac{x}{y}\right) + x f'\left(\frac{x}{y}\right) + x^2 f''\left(\frac{x}{y}\right) \cdots x^{m-3} F''\left(\frac{x}{y}\right) + x^{m-2} F'\left(\frac{x}{y}\right) + x^{m-1} F\left(\frac{x}{y}\right) + \varphi\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{X dx^m}{x^m} + \Psi\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{X' dx^m}{x^m}$$

C. Q. F. T.

Théoréme

Le caractère W repréſentant une formule en différentielles partielles, ſi l'équation $W = G$ a pour intégrale finie & complete $z = g$, & que l'équation $W = K$ ait pour intégrale finie & complete $z = k$, je dis que l'équation $W = G + K$ aura pour intégrale finie & complete. $z = g + k$.

Démonſtration

Soit Δ le ſymbole des opérations qu'il faut faire ſur z pour avoir W, de manière que l'on ait $\Delta \cdot z = W$, on aura auſſi $\Delta \cdot k = K$, & $\Delta . g = G$. ſoit $z = \omega$ l'intégrale de l'équation $W = G + K$, on aura de même $\Delta . \omega = G + K$ & par conſéquent $\Delta . \omega = \Delta . g + \Delta k$, ou, ce qui revient au même $\omega = g + k$. Donc généralement parlant de ce que l'on a $\Delta \omega = \Delta (g + k)$ on ne peut-pas en conclure que l'on ait $\omega = g + k$, mais ſeulement $\omega = g + k$ plus une arbitraire, mais comme on ſuppoſe completes les intégrales $z = g$ & $z = k$ les quantités g & k contiennent déjà les arbitraires, d'où il ſuit que le théorême eſt venu à la rigueur.

PROBLÊME IX.

Intégrer en quantités finies l'équation générale

$$x^m \frac{\delta^m z}{dx^m} + m \cdot x^{m-1} y \frac{\delta^{m-1} dz}{dx^{m-1} dy} \cdots \&c. = \begin{cases} Y \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + Y' \varphi'\left(\frac{x}{y}\right) \\ + Y'' \varphi''\left(\frac{x}{y}\right) \ldots \&c. \\ + X \Psi\left(\frac{x}{y}\right) + X' \Psi'\left(\frac{x}{y}\right) \\ + X'' \Psi''\left(\frac{x}{y}\right) \ldots \&c. \end{cases}$$

Les quantités Y, Y', Y'' étant des fonctions quelconques de y; X, X', X'' des fonctions quelconques de x, le nombre des termes du second membre étant quelconque, & les fonctions données φ, φ', φ'' .... Ψ, Ψ', Ψ''... étant indépendantes.

Solution

On pourroit resoudre ce problême particuliérement comme les précédents, mais il est plus simple d'employer le principe démontré dans le théorême. Ainsi l'intégrale demandée doit être

$$z = \begin{cases} f\left(\frac{x}{y}\right) + y f'\left(\frac{x}{y}\right) + y^2 f''\left(\frac{x}{y}\right) \ldots + y^{m-3} F''\left(\frac{x}{y}\right) \\ + y^{m-2} F'\left(\frac{x}{y}\right) + y^{m-1} F\left(\frac{x}{y}\right) + \varphi\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{Y dy^m}{y^m} \\ + \varphi'\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{Y dy^m}{y^m} + \varphi''\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{Y'' dy^m}{y^m} \ldots \&c. \\ + f\left(\frac{x}{y}\right) + x f'\left(\frac{x}{y}\right) + x^2 f''\left(\frac{x}{y}\right) \ldots + x^{m-3} F''\left(\frac{x}{y}\right) \\ + x^{m-2} F'\left(\frac{x}{y}\right) + x^{m-1} F\left(\frac{x}{y}\right) + \Psi\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{X dx^m}{x^m} \\ + \Psi'\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{X dx^m}{x^m} + \Psi''\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{X'' dx^m}{x^m} \ldots \&c. \end{cases}$$

Mais l'on a $x^m f\left(\frac{x}{y}\right) = y^m f\left(\frac{x}{y}\right)$ lors que la fonction f eſt arbitraire, donc l'intégrale ſera

$$z = \begin{cases} f\left(\frac{x}{y}\right) + y f'\left(\frac{x}{y}\right) + y^2 f''\left(\frac{x}{y}\right) \ldots + y^{m-3} F''\left(\frac{x}{y}\right) \\ + y^{m-2} F'\left(\frac{x}{y}\right) + y^{m-1} F\left(\frac{x}{y}\right) + \varphi\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{Y dy^m}{y^m} \\ + \varphi'\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{Y' dy^m}{y^m} + \varphi''\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{Y'' dy^m}{y^m} \ldots \&c. \\ + \Psi\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{X dx_m}{x^m} + \Psi'\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{X' dx^m}{x^m} \\ + \Psi''\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{X'' dx^m}{x^m} \ldots \&c. \end{cases}$$

Remarque.

J'ai fait voir dans le mémoire qui a pour objet la détermination des fonctions arbitraires dans les intégrales des équations aux différentielles partielles qu'il eſt toujours poſſible de déterminer les fonctions dans une équation de cette forme $z = K + L\,\varphi V + M\,\varphi' V + N\,\varphi'' V \ldots \&c.$ pour que cette équation ſatisfaſſe à autant des conditions particulières qu'elle renferme de fonctions, lors que ces conditions ſont de nature a être exprimées par une équation; ou de conſtruire la valeur de z, lorſque ces conditions ne ſont pas ſoumiſes à la loi de continuité; donc il ſera toujours poſſible de conſtruire l'équation différentielle du dernier problême, ou ſon intégrale, quand même la ſurface courbe à laquelle elle appartient, ſeroit d'ailleurs obligée de paſſer par un nombre m de courbes à double courbure, diſcontinuës, ou tracées au hazard dans l'éſpace, mais données.

Pour abréger, je ſuppoſerai toujours dans la ſuite que l'on ait

$$W = x^m \frac{\delta^m z}{dx^m} + m \,.\, x^{m-1} y \frac{\delta^{m-1} dz}{dx^{m-1} dy} + m \,.\, \left(\frac{m-1}{2}\right) x^{m-2} y^2 \frac{\delta^{m-2} ddz}{dx^{m-2} dy^2} \ldots \&c.$$

$$V = x^{m-1} \frac{\delta^{m-1} z}{dx^{m-1}} + (m-1) x^{m-2} y \frac{\delta^{m-2} dz}{dx^{m-2} dy} + (m-1)\left(\frac{m-2}{2}\right) x^{m-3} y^2 \frac{\delta^{m-3} ddz}{dx^{m-3} dy^2} \ldots \&c.$$

$$V' = x^{m-2} \frac{\delta^{m-2} z}{dx^{m-2}} + (m-2) x^{m-3} y \frac{\delta^{m-3} dz}{dx^{m-3} dy} + (m-2)\left(\frac{m-3}{2}\right) x^{m-4} y^2 \frac{\delta^{m-4} ddz}{dx^{m-4} dy^2} \ldots \&c.$$

$$V'' = x^{m-3} \frac{\delta^{m-3} z}{dx^{m-3}} \ldots \&c.$$ & ainſi de ſuite;

D'où il ſuit, comme on l'a vû dans le problême IV, que l'on aura

$$W = x \frac{\delta V}{dx} + y \frac{dV}{dy} - (m-1) V$$

$$V = x \frac{\delta V'}{dx} + y \frac{dV'}{dy} - (m-2) V'$$

$$V' = x \frac{\delta V''}{dx} + y \frac{dV''}{dy} - (m-3) V''$$

&c. . . . . &c.

PROBLÊME X.

Intégrer, ou réduire à un ordre moindre d'une unité l'équation

$W + AV + BV' + CV'' + DV''' \ldots \&c. = K.$

Les coëfficiens A, B, C, D . . . &c. étant conſtans, & le ſecond membre K étant de même forme que celui de l'équation du problême précédent.

Solution.

Soit mise à la place de W sa valeur donnée ci-dessus, & la proposée deviendra

$$x\frac{\delta V}{dx}+y\frac{dV}{dy}+(A-(m-1))V+BV'+CV''+DV'''\ldots\&c.=K.$$

Cela posé, quoique le nombre des coëfficiens A, B, C, D . . . &c. puisse être $=m$, & que la quantité z puisse se trouver sans différentielles dans la proposée, néant-moins je supposerai que le nombre de ces coëfficiens soit quelconque & représenté par n. & l'on transformera la proposée en fesant

$$V+aV'+bV''+cV'''\ldots\&c.=\omega$$

Le nombre des coëfficiens constans & indéterminés a, b, c . . . &c. étant $=n-1$ c'est à-dire les plus hautes différentielles de z qui se trouvent dans les valeurs de K & de ω étant le même ordre la dernière équation donne $V=\omega-aV'\,bV''-cV'''\ldots\&c.$

$$x\frac{\delta V}{dx}=x\frac{\delta\omega}{dx}-ax\frac{\delta V'}{dx}-bx\frac{\delta V''}{dx}-cx\frac{\delta V'''}{dx}\ldots\&c.$$

$$\&\,y\frac{dV}{dy}=y\frac{d\omega}{dy}-ay\frac{dV'}{dy}-by\frac{dV''}{dy}-cy\frac{dV'''}{dy}\ldots\&c.$$

substituant ces valeurs dans la proposée elle deviendra

$$\left.\begin{array}{l} x\frac{\delta\omega}{dx}+y\frac{d\omega}{dy}+\omega\,(A-(m-1)) \\ -a\left\{x\frac{\delta V'}{dx}+y\frac{dV'}{dy}+\left(A-(m-1)-\frac{B}{a}\right)V'\right\} \\ -b\left\{x\frac{\delta V''}{dx}+y\frac{dV''}{dy}+\left(A-(m-1)-\frac{C}{b}\right)V''\right\} \\ -c\left\{x\frac{\delta V'''}{dx}+y\frac{dV'''}{dy}+\left(A-(m-1)-\frac{D}{c}\right)V'''\right\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\&c. \end{array}\right\}=K$$

ou, ce qui revient au même

$$\left.\begin{array}{l} x\frac{\delta\omega}{dx}+y\frac{d\omega}{dy}+\omega(A-(m-1)) \\ -a\left\{x\frac{\delta V'}{dx}+y\frac{dV'}{dy}-(m-2)V'+\left(A-1-\frac{B}{a}\right)V'\right\} \\ -b\left\{x\frac{\delta V''}{dx}+y\frac{dV''}{dy}-(m-3)V''+\left(A-2-\frac{C}{c}\right)V'''\right\} \\ -c\left\{x\frac{\delta V'''}{dx}+y\frac{dV'''}{dy}-(m-4)V'''+\left(A-3-\frac{D}{c}\right)V'''\right\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \&c. \end{array}\right\}=K$$

Mettant à la place de $x\frac{\delta V'}{dx}+y\frac{dV'}{dy}-(m-2)V'$ ſa valeur V, à la place de $x\frac{\delta V''}{dx}+y\frac{dV''}{dy}-(m-3)V''$ ſa valeur V', la transformée deviendra

$$\left.\begin{array}{l} x\frac{\delta\omega}{dx}+y\frac{d\omega}{dy}+\omega(A-(m-1)) \\ -aV-a\left(A-1-\frac{B}{a}\right)V' \\ -bV'-b\left(A-2-\frac{C}{b}\right)V'' \\ -cV''-c\left(A-3-\frac{D}{c}\right)V''' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \&c. \end{array}\right\}=K$$

ou bien en reduiſant

$$x\frac{\delta\omega}{dx}+y\frac{d\omega}{dy}+\omega\left(A-(m-1)\right)-a\left\{V+\right)\left(A-1+\frac{b-B}{a}\right)V' + \frac{b}{a}\left(A-2+\frac{c-C}{b}\right)V''+\frac{c}{a}\left(A-3+\frac{*-D}{c}\right)V'''\ldots\&c.\right\}=K$$

Or il faut remarquer que le terme

$$V+\left(A-1+\frac{b-B}{a}\right)V'+\frac{b}{a}\left(A-2+\frac{c-C}{b}\right)V'' + \frac{c}{a}\left(A-3+\frac{*-D}{c}\right)V'''\ldots\&c.$$

ne différe de la valeur de ω que par les coëfficiens;

de plus on peut donner aux indéterminées a, b, c ... &c. des valeurs telles que ces coëfficiens ſoient égaux, c'eſt-à-dire que l'on ait

$$A - 1 + \frac{b - B}{a} = a$$

$$\frac{b}{a}\left(A - 2 + \frac{c - C}{b}\right) = b \text{ ou } A - 2 + \frac{c - C}{b} = a$$

$$\frac{c}{a}\left(A - 3 + \frac{* - D}{c}\right) = c \text{ ou } A - 3 + \frac{* - D}{c} = a$$

$$\ldots\ldots\ \&c. \ldots\ldots\ \&c.$$

Car le nombre des indéterminées eſt le même que celui des coëfficiens, donc la transformée peut ſe reduire à

$$x\frac{\delta\omega}{dx} + y\frac{d\omega}{dy} + \left(A - (m-1) - a\right)\omega = K$$

Mais, par ce qui précéde, l'intégrale de cette équation eſt

$$\omega = y^{a+m-1-A} F\left(\frac{x}{y}\right) + y^{a+m-1-A} K'$$

La quantité K' ſe trouvant comme dans le problême précédent, donc l'intégrale de la propoſée eſt

$$V + aV' + bV'' + cV''' \ldots = y^{a+m-1-A} F\left(\frac{x}{y}\right) + y^{a+m-1-A} K'$$

où les coëfficiens a, b, c ... &c. ne dépendent que de la ſolution d'une équation algébrique du dégré m.

C. Q. F. T.

Exemple

Soit $m = 2$, de manière que la propoſée ſe reduiſe à

$$\left.\begin{array}{l} x^2\frac{\delta\delta z}{dx^2} + 2xy\frac{\delta dz}{dxdy} + y^2\frac{ddz}{dy^2} \\ + A\left\{\frac{x\delta z}{dx} + y\frac{dz}{dy}\right\} \\ \qquad + Bz \end{array}\right\} = K$$

on

on aura $\omega = x\frac{\delta z}{dx} + y\frac{dz}{dy} + a z$, & si l'on fait encore, pour simplifier $K = 0$, on aura pour intégrale $x\frac{\delta z}{dx} + y\frac{dz}{dy} + a z = y^{a-A+1} F\left(\frac{x}{y}\right)$. actuellement pour déterminer la constante a qui se trouve seule dans ce cas là, on se servira de la première équation entre les indéterminées, qui parceque l'on a $b = 0$ devient

$$A - 1 - \frac{B}{a} = a, \text{ d'ou l'on tire}$$

$$a = \frac{A-1 \pm \sqrt{(A-1)^2 - 4B}}{2};$$

d'où il suit que l'intégrale demandée est

$$x\frac{\delta z}{dx} + y\frac{dz}{dy} + z \cdot \frac{A-1 \pm \sqrt{(A-1)^2-4B}}{2} = y^{\frac{-A+1 \pm \sqrt{(A-1)^2-4B}}{2}} F\left(\frac{x}{y}\right)$$

Remarque I.

Peut-être se trouverat on embarassé par l'ambiguité des signes, & demanderat on si l'équation différentielle de cet exemple a deux intégrales premières; mais il faut observer que ces deux intégrales sont identiques. On s'en convaincra facilement en les intégrant ou toutes deux separèment, ou conjointement, en conservant le double signe car alors on remarquera que l'intégrale en quantités finies est unique. En effet on sait que l'intégrale de l'équation générale $x\frac{\delta z}{dx} + y\frac{dz}{dy} + m z = y^n F\left(\frac{x}{y}\right)$ est $z = y^{-m} f \cdot \left(\frac{x}{y}\right) + \frac{y^n}{m+n} F\left(\frac{x}{y}\right)$ ou, (lorsque la fonction F est arbitraire, comme dans ce cas ci) $z = y^{-m} f\left(\frac{x}{y}\right) + y^n F\left(\frac{x}{y}\right)$; donc

l'intégrale finie de l'équation que j'ai prise pour exemple sera

$$z = y^{\frac{-A+1\mp\sqrt{(A-1)^2-4B}}{2}} f\left(\frac{x}{y}\right) + y^{\frac{-A+1\pm\sqrt{(A-1)^2-4B}}{2}} F\left(\frac{x}{y}\right)$$

où l'on voit que chaque exposant de y est une des racines de l'équation $a^2 + (A-1)\,a + B = 0$

Donc si l'on représente par P' & P ces deux racines, l'intégrale finie sera

$$z = y^P f\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P'} F\left(\frac{x}{y}\right)$$

ou bien $z = y^{P'} f\left(\frac{x}{y}\right) + y^P F\left(\frac{x}{y}\right)$

Or ces deux équations sont identiques; donc &c.

Il est facile de s'assurer de l'exactitude de cette intégrale, par la différentiation, car on aura, en ne conservant que les caractères f & F pour abbréger,

$$A\,x\,\frac{\delta z}{dx} = A\,y^P \frac{x}{y} f' + A\,y^{P'} \frac{x}{y} F'$$

$$A\,y\,\frac{dz}{dy} = -A y^P \frac{x}{y} f' + A\,P\,y^P f - A\,y^{P'} \frac{x}{y} F' + A\,P'\,y^{P'} F$$

$$x^2 \frac{\delta\delta z}{dx^2} = y^P \frac{x}{y} f' + y^P \frac{x^2}{y^2} f'' + y^{P'} \frac{x}{y} F' + y^{P'} \frac{x^2}{y^2} F'' - y^P \frac{x}{y} f' - y^{P'} \frac{x}{y} F'.$$

$$\frac{2xy\,\delta dz}{dx\,dy} = -2y^P \frac{x}{y} f' - 2y^P \frac{x^2}{y^2} f'' + 2Py^P \frac{x}{y} f' - 2y^{P'} \frac{x}{y} F' - 2y^{P'} \frac{x^2}{y^2} F''$$
$$+ 2P'\,y^{P'} \frac{x}{y} F'$$

$$y^2 \frac{ddz}{dy^2} = \begin{cases} y^P \frac{x}{y} f' - Py^P \frac{x}{y} f' + y^P \frac{x^2}{y^2} f'' + P^2 y^P f - P\,y^P \frac{x}{y} f' \\ + y^P \frac{x}{y} f' - P\,y^P f + y^{P'} \frac{x}{y} F' - P' y^{P'} \frac{x}{y} F' + y^{P'} \frac{x^2}{y^2} F'' \\ + P'^2 y^{P'} F - P'\,y^{P'} \frac{x}{y} F' + y^{P'} \frac{x}{y} F' - P'\,y^{P'} F \end{cases}$$

$$B\,z = B\,y^P f + B\,y^{P'} F$$

ajoutant ensemble toutes ces quantités, on trouvera

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x^2\delta\delta z}{dx^2}+2xy\frac{\delta\, dz}{dxdy}+y^2\frac{ddz}{dy^2}\\ +A\left\{\frac{x\delta z}{dx}+y\frac{dz}{dy}\right\}\\ \quad +Bz\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l}y^P f\left(\frac{x}{y}\right)\{P^2+(A-1)P+B\}\\ +y^{P'}F\left(\frac{x}{y}\right)\{P'^2+(A-1)P'+B\}\end{array}\right.$$

Quantité qui, parceque les fonctions f & F sont indépendantes, ne peut devenir $=0$, que chacun des coëfficiens

$$P^2+(A-1)P+B \;\;\&\;\; P'^2+(A-1)P'+B$$

ne soit $=0$ & par conséquent que les exposans P & P' ne soient les racines inégales de l'équation commune $P^2+(A-1)P+B$. Je dis que les racines P & P' doivent être inégales, parcequ'autrement l'intégrale $z=y^P f\left(\frac{x}{y}\right)+y^{P'}F\left(\frac{x}{y}\right)$ se réduiroit à $z=y^P f\left(\frac{x}{y}\right)$ & ne seront plus complettes, puis qu'elles ne renfermeront plus qu'une fonction arbitraire.

Remarque II.

L'intégrale du problême précédent étant

$$V+aV'+bV''+cV'''\ldots\&c.=y^{a+m-1-A}F\left(\frac{x}{y}\right)+y^{a+m-1-A}K'$$

il suit qu'elle est de même forme que la proposée, que par conséquent on l'intégrera de la même maniere, & que son intégrale sera encore de même forme c'est-à-dire

$$V+a'V''\,b'V'''\ldots\&c.=y^P f\left(\frac{x}{y}\right)+y^{P'}F\left(\frac{x}{y}\right)+K''$$

Les exposans P, & P' devant se trouver en fonction de a, b, $c\ldots$ &c. d'où il est facile de conclure que l'intégrale finie de la proposée doit être de cette forme

$$z=y^P\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+y^{P'}\Psi\left(\frac{x}{y}\right)+y^{P''}f\left(\frac{x}{y}\right)+y^{P'''}F\left(\frac{x}{y}\right)\ldots\&c.+M$$

les exposants P, P', P', $P'''\ldots$ &c. étant constans &

dépendans des coëfficiens A, B, C . . . &c. & le terme M dépendant du ſecond membre K, de manière que ſi l'on a $K = 0$, on aura auſſi $M = 0$. Il s'agit actuellement de trouver ce terme M & les expoſans $P, P', P'' \cdots$ &c. or ces expoſans P, $P' \cdots$ &c. ſont indépendans de K, ainſi pour les trouver plus ſimplement, je ſuppoſerai $K=0$, je chercherai enſuite la forme du terme M.

PROBLÊME XI.

Intégrer en quantités finies l'équation $W + AV + BV' + CV'' + DV''' \cdots \&c. = 0$

Solution.

On vient de voir que l'intégrale demandée eſt de la forme $z = y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P'} \Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P''} f\left(\frac{x}{y}\right) \cdots \&c.$

Il ne s'agit donc plus que de différencier cette équation pour trouver le rapport des expoſans P, $P' \cdots$ &c. aux coëfficiens A, B, $C \cdots$ &c. mais l'opération n'étant pas praticable ſous cette généralité, je vais prendre des cas particuliers.

On a déjà vû que dans le cas de $m = 2$, ſi l'on fait $z = y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P'} \Psi\left(\frac{x}{y}\right)$, on a $W + AV + BZ = y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ $\left(P^2 + (A-1)P + B\right) + y^{P'} \Psi\left(\frac{x}{y}\right)\left(P'^2 + (A-1)P' + B\right)$ quantité qui ne peut devenir $= 0$, que les expoſans P & P' ne ſoient les racines de l'équation $P^2 + (A-1)P + B = 0$ on trouvera de la même manière pour le cas de $m = 3$ qu'en feſant $z = y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P'} \Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P''} f\left(\frac{x}{y}\right)$ l'on ne peut avoir $W + AV + BV' + CZ = 0$ que les expo-

ſans ne ſoient les racines de l'équation $P^3 + P^2 \left(A - (2+1) \right) + P \left(B - A + 2 \cdot 1 \right) + C = 0$

Si l'on a $m = 4$, on trouvera qu'en feſant $z = y^p \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{p'} \psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{p''} f\left(\frac{x}{y}\right) + y^{p'''} F\left(\frac{x}{y}\right)$ on ne peut avoir $W + AV + BV' + CV'' + DZ = 0$ que les expoſans ne ſoient les racines inégales de

$$P^4 + P^3 \left\{ A - (3+2+1) \right\} + P^2 \left\{ B - (2+1)A + 3(2+1) \atop + 2 \cdot 1 \right\}$$
$$+ P \left\{ C - B + 2 \cdot 1 A - 3 \cdot 2 \right\} + D = 0$$

Dans le cas de $m = 5$, on trouvera que les cinq expoſans doivent être les racines de l'équation

$$P^5 + P^4 \left\{ A - (4+3+2+1) \right\} + P^3 \left\{ \begin{matrix} B - (3+2+1)A + 4(3+2+1) \\ + 3(2+1) \\ + 2 \cdot 1 \end{matrix} \right\}$$
$$+ P^2 \left\{ \begin{matrix} C - (2+1)B + 3(2+1) \\ + 2 \cdot 1 \end{matrix} \right\} A - 4 \left\{ \begin{matrix} 3(2+1)2 \\ + 2 \cdot 1 \\ - 3(2 \cdot 1) \end{matrix} \right\} P \left\{ \begin{matrix} D - C + 2B \\ - 3 \cdot 2 A \\ + 4 \cdot 3 \cdot 2 \end{matrix} \right\} + E = 0$$

En continuant ainſi de ſuite, on trouvera facilement la loî ſuivant laquelle ſe forme cette équation, & l'on reconnoitra qu'elle eſt toujours de la forme ſuivante

$$P^m + P^{m-1}(A - \alpha) + P^{m-2}(B - \alpha' A + \beta) + P^{m-3}(C - \alpha'' B + \beta' A - \gamma)$$
$$+ P^{m-4}(D - \alpha''' C + \beta'' B - \gamma' A + \delta) \ldots \&c. = 0$$

dans laquelle les quantités $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''' \ldots$ &c., $\beta, \beta', \beta'', \beta''' \ldots$ &c. $\gamma, \gamma', \gamma'', \gamma''' \ldots$ &c. $\delta, \delta' \ldots$ &c. ſont des nombres dont voici la formation.

1° Si l'on retranche le premier des termes dont eſt compoſé α on aura α', de même ſi l'on retranche le premier terme de α' on aura α'' & ainſi de ſuite. La même choſe a lieu pour tous les autres nombres répreſentés par le même caractère ; ainſi en retranchant le premier terme dont eſt compoſé β on a β', de même

on forme β'' en effaçant le premier terme de β', il en eſt de même pour la ſuite des nombres $\gamma, \gamma' \gamma'' \gamma'''$ . . . &c. $\delta \cdot \delta'$ . . . &c. de manière que tous ces nombres ſeront connus ſi on connoît les premiers de chaque ſuite, c'eſt-à-dire α, β, γ, δ . . . &c.

2° Il eſt aiſé de voir que α eſt $= (m-1) + (m-2) + (m-3) + (m-4) \ldots 0$
que β eſt $= (m-1)\,\alpha' + (m-2)\,\alpha'' + (m-3)\,\alpha''' + (m-4)\,\alpha'''' \ldots$ &c.
que γ eſt $= (m-1)\,\beta' + (m-2)\,\beta'' + (m-3)\,\beta''' + (m-4)\beta'''' \ldots$ &c.
que δ eſt $= (m-1)\gamma' + (m-2)\,\gamma'' + (m-3)\,\gamma''' + (m-4)\gamma'''' \ldots$ &c.

Il eſt peut-être plus ſimple de dire que α eſt $= (m-1) + (m-2) + (m-3) + (m-4) \ldots$ &c., que β eſt la ſomme des produits de ces quantités priſes 2 à 2, γ la ſomme de leurs produits priſes trois à trois . . . &c. De même que α' eſt $= (m-2) + (m-3) + (m-4) + (m-5) \ldots$ &c. que β' eſt la ſomme des produits de ces quantités priſes 2 à 2, γ' la ſomme de leurs produits priſes 3 à 3 . . . &c. Pareillement que α'' eſt $= (m-3) + (m-4) + (m-5) \ldots$ &c. que β'' eſt égal à la ſomme des produits de ces quantités priſes 2 à 2, γ'' la ſomme de leurs produits priſes 3 à 3 . . . &c. & ainſi de ſuite.

Donc il ſera poſſible de former l'équation du dégré *m* dont les racines doivent donner les expoſans de *y* dans l'intégrale générale de la proposée; or on a vû qu'il n'y avoit plus rien d'indéterminé dans l'intégrale que ces expoſans, donc en ſuppoſant la perfection de l'algébre, on aura toujours l'intégrale finie de l'équation

C. Q. F. T.

$$W + AV + BV' + CV'' + DV''' \ldots \&c. = 0$$

Rémarque

Les expoſans P, P', P'' . . . &c. doivent être les racines inégales de l'équation que nous venons de trouver,

parcequ'autrement le nombre des fonctions arbitraires de l'intégrale deviendroit moindre que le dégré de la différentielle de la proposée, & que cette intégrale ne feroit plus complete. En effet si l'on suppose $P = P'$ l'équation $z = y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y^P \psi\left(\frac{x}{y}\right)$ se réduit à $z = y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ qui n'est que l'intégrale incomplete d'une équation en différentielles partielles du second dégré. Or il peut arriver que l'équation qui donne les valeurs des exposans ait toutes ces racines égales, donc il peut arriver des cas où la méthode précédente ne donne pas l'intégrale complete de la proposée. Le problême suivant remédie à cet inconvénient.

PROBLÊME XII.

Compléter l'intégrale de l'équation $W + AV + BV' + CV'' + DV''' \ldots \&c. = 0$ lorsque les exposans P, P', $P'' \ldots \&c.$ sont égaux.

Solution.

On intégrera d'abord une fois la proposée, & d'après tout ce qui précéde, il est clair que l'on aura pour intégrale première & complete

$$V + aV' + bV'' + cV''' \ldots \&c. = y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

De plus en fesant (comme dans le problême X) $V' + a'V'' + b'V''' \ldots \&c. = \omega$ on mettra cette intégrale sous la forme suivante

$$x\frac{\delta\omega}{dx} + y\frac{d\omega}{dy} \pm H\omega = y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

dans laquelle la quantité H est une constante fonction de A, B, $C \ldots \&c.$ Or nous avons vû que l'intégrale de

cette équation est

$$\omega = y^{-H}\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P}\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

Donc puisque les exposans P, P', P'' . . . &c., par hypothèse, sont égaux, il faut que l'on ait $P = -H$, d'où il suit que la transformée doit être

$$x\frac{\delta\,\omega}{d\,x} + y\frac{d\,\omega}{d\,y} - P\,\omega = y^{P}\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

Pour intégrer cette équation soit $d\,\omega = p\,d\,x + q\,d\,y$, ce qui donne $p\,x + q\,y - P\,\omega = y^{P}\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, on aura $d\,\omega = p\,dx + \frac{P\,\omega}{y}\,d\,y + y^{P-1}\,d\,y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{p\,x}{y}\,d\,y$ ou bien

$$y\,d\,\omega - P\,\omega\,d\,y = p\,y^{2}\left\{\frac{y\,d\,x - x\,d\,y}{y^{2}}\right\} + y^{P}\,d\,y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

on rendra le premier membre différentielle complete en divisant tout par y^{P+1} & l'on mettra après l'opération l'équation précédente sous cette forme

$$\frac{y^{P}d\omega - P\omega y^{P-1}\,dy}{y^{2P}} = p\,y^{1-P}\left\{\frac{ydx - xdy}{y^{2}}\right\} + y^{-1}\,d\,y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

dans laquelle le premier membre est $= d\,\frac{\omega}{y^{P}}$. Mais le dernier terme $\frac{dy}{y}\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ est

$$= d\left(\log.\,y\cdot\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\right) - l.\,y\left\{\frac{ydx - xdy}{y^{2}}\right\}\varphi'\left(\frac{x}{y}\right);$$

donc cette équation se réduit à

$$d\left(\frac{\omega}{y^{P}}\right) = \left(py^{1-P} - \log.y\,\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\right)\left\{\frac{ydx - xdy}{y^{2}}\right\} + d\left\{\log.\,y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\right\}$$

dont l'intégrale ne peut être que

$$\omega\,y^{-P} = \Psi\left(\frac{x}{y}\right) + \log.\,y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

ou

$$\text{ou } \omega = y^p \Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^p \log. y\, \varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

dans laquelle les exposans de y sont égaux à la verité, mais sans que les deux fonctions arbitraires se réduisent, le second étant multiplié par log. y. Ainsi l'intégrale deuxième dans l'hypothèse des racines égales est

$$V' + a'V'' + b'V''' + c'V'''' \ldots \&c. = y^p \Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^p \log. y\, \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

On transformera cette équation, comme la précédente en celleci

$$x\frac{\delta\omega'}{dx} + y\frac{d\omega'}{dy} + H'\omega = y^p \Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^p \text{ l.} y\, \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

& l'on trouvera de la même manière que les exposans étant égaux, l'on doit avoir $H' = -P$ d'où il suit qu'en fesant $d\omega = p\,dx + q\,dy$, on aura de même que précédemment

$$y\,d\omega - P\omega\,dy = py^2\left\{\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right\} + y^P dy\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^P \text{ l.} y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)dy$$

En divisant par y^{P+1}, on rendra le premier membre différentielle complete, & l'on aura

$$d(\omega y^{-P}) = py^{1-P}\left\{\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right\} + \frac{dy}{y}\Psi\left(\frac{x}{y}\right) + \text{l.} y.\frac{dy}{y}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

ou parceque

$$\frac{dy}{y}\Psi\left(\frac{x}{y}\right) \text{ est } = d\left(\log. y\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right)\right) - \log. y\left\{\frac{ydx - xdy}{y^2}\right\}\Psi'\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\& \text{ l.} y\frac{dy}{y}\varphi\left(\frac{x}{y}\right) = d\left(\frac{(\log. y)^2}{2}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\right) - \frac{1}{2}(\log. y)^2\left\{\frac{ydx - xdy}{y^2}\right\}\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)$$

on aura

$$d(\omega y^{-P}) = \left(py^{1-P} - \log. y\,\Psi'\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{2}(\log. y)^2\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\right)\left\{\frac{ydx - xdy}{y^2}\right\}$$

$$+ d \left\{ \log. y \Psi \left(\frac{x}{y}\right) \right\} + \frac{1}{2} d \left\{ (\log. y)^2 \varphi \left(\frac{x}{y}\right) \right\}$$

dont l'intégrale ne peut-être que

$$\dot{\omega} y^{-P} = F\left(\frac{x}{y}\right) + \log. y \Psi \left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{2} (\log. y)^2 \varphi \left(\frac{x}{y}\right)$$ ou bien

multipliant par y^P, & négligeant le coëfficient $\frac{1}{2}$ à cauſe que la fonction φ eſt arbitraire, on aura pour intégrale troiſième & complete de la propoſée

$$V'' + a'' V''' + b'' V''' \ldots \&c. = y^P F\left(\frac{x}{y}\right) + y^P \log. y \Psi \left(\frac{x}{y}\right)$$
$$+ y^P (\log. y)^2 \varphi \left(\frac{x}{y}\right)$$

On fera la même opération ſur cette troiſième intégrale ... &c. d'où l'on conclurra que l'intégrale complete de la propoſée, lorſque les expoſants P, P', P'' ... &c. ſont égaux, eſt

$$z = y^P F\left(\frac{x}{y}\right) + y^P \log. y F'\left(\frac{x}{y}\right) + y^P (\log. y)^2 \Psi \left(\frac{x}{y}\right)$$
$$+ y^P (\log. y)^3 \varphi \left(\frac{x}{y}\right) \ldots \&c.$$

C. Q. F. T.

Corollaire

Si les racines P, P', P'' ... &c. dont le nombre eſt $= m$ n'étoient pas toutes égales mais qu'il n'y en eut qu'un certain nombre $= m - n$, on intégreroit d'abord la propoſée un nombre de fois $= n$, & l'on auroit ſon intégrale $n^{ème}$ complete ; enſuite en l'intégreroit $(m-n)$ fois connue dans le problême précédent, & ſon intégrale finie & complete ſeroit par conſéquent

$$z = \begin{cases} y^p f\left(\frac{x}{y}\right) + y^{p'} f'\left(\frac{x}{y}\right) + y^{p''} f''\left(\frac{x}{y}\right) + y^{p'''} f'''\left(\frac{x}{y}\right) \ldots \&c. \\ + y^p \cdot \log. y\, F\left(\frac{x}{y}\right) + y^p (\log. y)^2 F'\left(\frac{x}{y}\right) \\ + y^p (\log. y)^3 F''\left(\frac{x}{y}\right) \ldots \&c. \end{cases}$$

Le nombre des termes de la ſeconde ſuite étant $(m-n-1)$ & $(1+n)$ étant celui des termes de la première.

PROBLÊME XIII.

Intégrer en quantités finies l'équation générale $W + AV + BV' + CV'' + DV''' \ldots \&c. = K$, le ſecond membre K étant compoſé par voie d'addition & ſouſtraction d'un nombre quelconque de quantités de ces formes $Y \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ & $X \psi\left(\frac{x}{y}\right)$. Y & X ſont correſpondamment des fonctions quelconques données la première de y & la ſeconde de x.

Solution.

Suppoſons d'abord que le ſecond membre K contienne ſeulement $Y \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, on mettra la propoſée ſous cette forme $x\frac{\delta \omega}{dx} + y\frac{d\omega}{dy} = P\omega + Y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$; P étant une des racines de l'équation qui donneroit les expoſans de y dans l'intégrale de la propoſée, ſi l'on avoit $K = 0$. Or nous avons vû (probl. VII.) que l'intégrale de cette transformée eſt $\omega = y^P F\left(\frac{x}{y}\right) + y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{Y\,dy}{y^{P+1}}$, donc l'intégrale première ſera

$$V + aV' + bV'' + CV''' \dots \text{\&c.} = y^P F\left(\frac{x}{y}\right) + y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{Y\,dy}{y^{P+1}}$$

on transformera de même celleci en

$$x \frac{\delta \omega'}{dx} + y \frac{d\omega'}{dy} = P'\omega' + y^P F\left(\frac{x}{y}\right) + y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{Y\,dy}{y^{P+1}}$$

P' étant la ſeconde racine de l'équation qui donne les expoſans & l'on aura en intégrant

$$\omega' = y^{P'} F'\left(\frac{x}{y}\right) + y^P F\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P'} \varphi\left(\frac{x}{y}\right) \int \left(\frac{y^P\,dy}{y^{P'+1}} \int \frac{Y\,dy}{y^{P+1}} \right)$$

En intégrant encore une fois on trouvera

$$\omega'' = y^{P''} F''\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P'} F\left(\frac{x}{y}\right) + y^P F\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$+ y^{P''} \varphi\left(\frac{x}{y}\right) \int \left\{ \frac{y^{P'}dy}{y^{P''+1}} \int \left\{ \frac{y^P\,dy}{y^{P'+1}} \int \frac{Y\,dy}{y^{P+1}} \right\} \right\}$$

d'où l'on conclurra que K étant $= Y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, l'intégrale finie de la propoſée ſeroit

$$z = \left\{ \begin{array}{l} y^P F\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P'} F'\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P''} F''\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P'''} F'''\left(\frac{x}{y}\right) \dots \text{\&c.} \\ + y^{P''m} \varphi\left(\frac{x}{y}\right) \left\{ \dots \int \left\{ \frac{y^{P''}dy}{y^{P'''+1}} \int \left\{ \frac{y^{P'}\,dy}{y^{P''+1}} \int \left\{ \frac{y^P\,dy}{y^{P'+1}} \right.\right.\right.\right. \\ \left. \left. \left. \left. \int \frac{Y\,dy}{y^{P+1}} \right\} \right\} \right\} \dots \right\} \end{array} \right\}$$

La ſeconde ſuite qui eſt ici indéfinie à cauſe de l'expoſant indéterminé m, doit être pouſſée juſqu'à ce qu'on ait empoyé toutes les racines P, P', P'' ... &c. c'eſt à dire que pour avoir ſon expreſſion finie il faut intégrer un nombre de fois $= m$.

Si le terme K au lieu d'être $= Y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ étoit $= Y'\,\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)$, on auroit dans l'intégrale qui donne la valeur de z une ſeconde ſuite de même forme ; donc quel-

que nombre des quantités de cette forme $Y\ \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ que K renferme, l'intégrale de la propofée, en vertu du Théorême démontré ci-devant, fera compofée 1.° de la première fuite $y^P F\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P'} F'\left(\frac{x}{y}\right) \ldots$ &c. plus d'autant de fuites de mêmes formes que la feconde, mais où il faudra mettre fucceffivement $Y, Y', Y'' \ldots$ &c. pour Y & $\varphi, \varphi', \varphi'' \ldots$ &c. pour φ.

Actuellement fuppofont que le fecond membre K ne renferme que $X\ \Psi\left(\frac{x}{y}\right)$, on mettra la propofée fous cette forme $x\frac{d\omega}{dx} + y\frac{d\omega}{dy} = Q\omega + X\Psi\left(\frac{x}{y}\right)$, Q étant une conftante dont je ferai voir la nature, & par la méthode du problême VIII on trouvera que cette équation a pour intégrale.

$$\omega = x^Q F\left(\frac{x}{y}\right) + x^Q \Psi\left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{X\,dx}{x^{Q+1}}.$$

ou parceque l'on a $x^Q F\left(\frac{x}{y}\right) = y^Q . \frac{x^Q}{y^Q} F\left(\frac{x}{y}\right) = y^Q F'\left(\frac{x}{y}\right)$ la fonction F étant arbitraire on aura pour intégrale $\omega = y^Q F\left(\frac{x}{y}\right) + x^Q \Psi\left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{X\,dx}{x^{Q+1}}$. Mais par le Théorême le terme $y^Q F\left(\frac{x}{y}\right)$ doit être le même que fi l'on avoit en $K = 0$, & dans ce cas là on auroit $Q = P$, racine de l'équation que l'on a trouvée dans le problême XI. donc on aura pour intégrale première

$$\omega = y^P F\left(\frac{x}{y}\right) + x^P \Psi\left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{X\,dx}{x^{P+1}}.$$

On l'intégrera de nouveau, & P' étant la feconde racine de l'équation qui donneroit les expofans de y fi l'on avoit $K = 0$, on trouvera par la même méthode pour intégrale feconde

$$\omega' = y^p F'\left(\frac{x}{y}\right) + y^p F\left(\frac{x}{y}\right) + x^{p'} \Psi\left(\frac{x}{y}\right) \int \left\{ \frac{x^p\, dx}{x^{p'+1}} \int \frac{X\, dx}{x^{p+1}} \right\}$$

en continuant ainsi de suite, on trouvera pour intégrale finie

$$z = \begin{cases} y^p F\left(\frac{x}{y}\right) + y^{p'} F'\left(\frac{x}{y}\right) + y^{p''} F''\left(\frac{x}{y}\right) + y^{p'''} F'''\left(\frac{x}{y}\right) \ldots \&c. \\ + \ x^{p'm} \ \Psi \left(\frac{x}{y}\right) \left\{ \ldots \int \left\{ \frac{x^{p'''}\, dx}{x^{p''''+1}} \int \left\{ \frac{x^{p''}\, dx}{x^{p'''+1}} \right.\right.\right. \\ \left.\left.\left.\left. \int \left\{ \frac{x^{p'}\, dx}{x^{p''+1}} \int \left\{ \frac{x^p\, dx}{x^{p'+1}} \int \frac{X\, dx}{x^{p+1}} \right\} \right\} \right\} \right\} \ldots \right\} \end{cases}$$

Mais par tout ce qui précéde, il est facile de réconnoitre que si le second membre K étoit composé d'un certain nombre de quantités de cette forme $X \Psi \left(\frac{x}{y}\right)$ l'intégrale de la proposée seroit composée 1° de la suite d'arbitraires $y^p F\left(\frac{x}{y}\right) + y^p F' \left(\frac{x}{y}\right) \cdots \&c.$ 2° d'autant de suites comme la seconde, qu'il y auroit de quantités $X \Psi \left(\frac{x}{y}\right) + X' \Psi' \left(\frac{x}{y}\right)$, en observant qu'on auroit successivement $X, X', X'' \cdots \&c.$ pour X & $\Psi, \Psi', \Psi'' \cdots \&c.$ pour Ψ.

Donc en joignant (en vertu du Théorême) les deux parties de la solution on trouvera pour intégrale générale & finie de la proposée

$$z = \begin{cases} y^p F\left(\frac{x}{y}\right) + y^{p'} F'\left(\frac{x}{y}\right) + y^{p''} F''\left(\frac{x}{y}\right) + y^{p'''} F'''\left(\frac{x}{y}\right) \cdots \&c. \\ + y^{p''m} \varphi\left(\frac{x}{y}\right) \left\{ \ldots \int \left\{ \frac{y^{p''}\, dy}{y^{p'''+1}} \int \left\{ \frac{y^{p'}\, dy}{y^{p''+1}} \int \left\{ \frac{y^p\, d}{y^{p'+1}} \right.\right.\right.\right. \\ \left.\left.\left.\left. \int \frac{Y\, dy}{y^{p+1}} \right\} \right\} \right\} \ldots \right\} \end{cases}$$

plus à autant de termes comme le dernier qu'il y a de quantités de la forme $Y \varphi \left(\frac{x}{y}\right)$, en observant de mettre successivement $Y', Y'', Y''' \ldots \&c.$ & $\varphi' \ \varphi'' \ \varphi''' \ldots \&c.$

$$z = \begin{cases} + x^{P'''m} \Psi\left(\frac{x}{y}\right) \left\{ \ldots \int \left\{ \frac{x^{P''} dx}{x^{P'''+1}} \int \left\{ \frac{x^{P'} dx}{x^{P''+1}} \int \left\{ \frac{x^{P} dx}{x^{P'+1}} \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \int \frac{X\,dx}{x^{P+1}} \right\} \right\} \right\} \ldots \Big\} \\ \text{Plus a autant de termes comme le précédent qu'il y a} \\ \text{dans } K \text{ de quantités de la forme } X\Psi\left(\frac{x}{y}\right)\text{, en ob-} \\ \text{servant d'employer successivement } X', X'', X''' \ldots \&c. \\ \& \ \Psi' \ \Psi'' \ \Psi''' \ldots \&c. \end{cases}$$

C. Q. F. T.

Remarque I.

Il importe peu dans quel ordre on emploie les racines P, P', P''... &c. pour former les termes déterminés de cette équation, on aura toujours le même résultat pourvû qu'on les emploie toutes; car on sait que si M, N, L.. sont des fonctions de x, l'on aura
$\int(M\,dx\int(N\,dx\int L\,dx)) = \int(N\,dx\int(M\,dx\int L\,dx))$
$= \int(N\,dx\int(L\,dx\int M\,dx)) = \ldots$ &c.

Rémarque II.

J'ai supposé dans l'intégrale précédente que toutes les racines P, P', P''... &c. étoient inégales, mais dans le cas où elles seroient toutes égales, il est facile de voir, (Probl. XII.) que l'on auroit pour integrale finie & complete

$$z = \begin{cases} y^P F\left(\frac{x}{y}\right) + y^P \text{Log.}\, y\, F'\left(\frac{x}{y}\right) + y^P (\text{Log.}\, y)^2 F''\left(\frac{x}{y}\right) \\ + y^P (\text{Log.}\, y)^3 F'''\left(\frac{x}{y}\right) \\ + y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right) \left\{ \ldots \int \left\{ \frac{dy}{y} \int \left\{ \frac{dy}{y} \int \left\{ \frac{dy}{y} \int \frac{Y\,dy}{y^{P+1}} \right\} \right\} \right\} \ldots \right\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \&c. \end{cases}$$

$$z = \begin{cases} +x^p \Psi\left(\frac{x}{y}\right)\left\{\ldots\int\left\{\frac{dx}{x}\int\left\{\frac{dx}{x}\int\left\{\frac{dx}{x}\int\frac{X dx}{x^{p+1}}\right\}\right\}\right\}\ldots\right\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \&c. \end{cases}$$

car si le second membre K ne renfermoit que des termes de la forme $Y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, il est évident que la suite des arbitraires seroit

$$y^p F\left(\frac{x}{y}\right) + y^p \text{Log.}\, y\, F'\left(\frac{x}{y}\right) + y^p (\text{Log.}\, y)^2 F''\left(\frac{x}{y}\right) \ldots \&c.$$

De même, si K ne contenoit que des termes de la forme $X\Psi\left(\frac{x}{y}\right)$ la suite des arbitraires seroit

$$x^p F\left(\frac{x}{y}\right) + x^p \text{l.}x\, F'\left(\frac{x}{y}\right) + x^p (\log.\, x)^2 F''\left(\frac{x}{y}\right) \ldots \&c.$$

Or il est évident que ces deux suites se réduisent à la même. On a déjà vû (Probl. V. Coroll. I.), que l'on pouroit substituer y^p à x^p, il ne reste donc plus qu'à faire voir qu'on peut substituer l. y à l. x c'est-à-dire que l'on a

$$y^p \text{l.}x\, F'\left(\frac{x}{y}\right) = y^p \text{l.}y\, F'\left(\frac{x}{y}\right),\ y^p(\text{l.}y)^2 F''\left(\frac{x}{y}\right) = y^p(\text{l.}x)^2 F''\left(\frac{x}{y}\right)$$

Mais l'on a $y^p \text{l.}x\, F'\left(\frac{x}{y}\right) = y^p(\text{l.}x + \text{l.}y - \text{l.}y)\, F'\left(\frac{x}{y}\right) = y^p\, \text{l.}y\, F\left(\frac{x}{y}\right) + y^p\, \text{l.}\left(\frac{x}{y}\right) F'\left(\frac{x}{y}\right)$ & (parceque la fonction F est arbitraire) $= y^p\, \text{l.}y\, F'\left(\frac{x}{y}\right) + y^p\, F\left(\frac{x}{y}\right)$

De même on a $(\text{l.}\, x)^2 F''\left(\frac{x}{y}\right) = (\text{l.}y + \text{l.}\, x - \text{l.}\, y)^2 F''\left(\frac{x}{y}\right) = = (\text{l.}\, y + l\,\frac{x}{y})^2\, F''\left(\frac{x}{y}\right) = (l\, y)^2\, F'\left(\frac{x}{y}\right) + 2\, \text{l.}y\, l\,\frac{x}{y}\, F''\left(\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{x}{y}\right)^2 F'\left(\frac{x}{y}\right)$. Donc en ajoutant ensemble ces deux valeurs, on aura $F\left(\frac{x}{y}\right) + \text{l.}\, x\, F\left(\frac{x}{y}\right)$

$$+(\mathrm{l}.x)^2 F''\left(\frac{x}{y}\right) = \begin{array}{l} F\left(\frac{x}{y}\right) \\ +F\left(\frac{x}{y}\right) + \mathrm{l}.y F'\left(\frac{x}{y}\right) \\ +F\left(\frac{x}{y}\right) + 2\,\mathrm{l}.y F'\left(\frac{x}{y}\right) + (\mathrm{l}.y)^2 F''\left(\frac{x}{y}\right) \end{array}$$

(ou bien confondant les fonctions arbitraires) $= F\left(\frac{x}{y}\right) + \mathrm{l}.y F'\left(\frac{x}{y}\right) + (\mathrm{l}.y)^2 F''\left(\frac{x}{y}\right)$. Il en feroit de même pour un plus grand nombre de termes, donc &c.
Ceci n'avoit pas befoin d'une démonftration particulière, c'étoit une fuite immédiate du Théorême.

Corollaire I.

Si les racines P, P', P'' ... &c. fe furpaffent toutes les unes les autres de l'unité, c'eft-à-dire que l'on ait $P = P' + 1$, $P' = P'' + 1$ ... &c., les termes déterminés de l'intégrale générale deviendront

$$\Phi\left(\frac{x}{y}\right)\int^m \frac{Y\,dy^m}{y^{P+1}} + \varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\int^m \frac{Y'dy^m}{y^{P+1}} \dots \&c. + \Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int^m \frac{X dx^m}{x^{P+1}} + \Psi'\left(\frac{x}{y}\right)\int^m \frac{X'dx^m}{x^{P+1}} \dots \&c.$$

Or fi l'on a $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ ... &c. l'équation du problême XI a non feulement les racines en progreffion arithmétique dont la différence eft 1, mais on a encore $P = m - 1$, donc alors les termes déterminés de l'intégrale feront

$$\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int^m \frac{Y dy^m}{y^m} + \varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\int^m \frac{Y'dy^m}{y^m} \dots \&c. + \Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int^m \frac{X\,dx^m}{x^m} + \Psi'\left(\frac{x}{y}\right)\int^m \frac{X'\,dx^m}{x^m} \dots \&c.$$

Ce qui revient au cas du problême IX, & donne le même résultat que l'on a déjà trouvé.

Corollaire II.

L'intégrale générale du problême précédent est de la forme $z = K + L\varphi u + M\varphi' u + N\varphi'' u \ldots$ &c. Or j'ai fait voir dans le mémoire qui a pour objet la détermination des fonctions arbitraires, qu'il est toujours possible de déterminer les fonctions de cette équation, de manière qu' elle satisfasse à autant de conditions particulières, analogiques ou non, qu'il y a de fonctions arbitraires, donc il sera toujours possible de construire la surface courbe qui auroit pour équation

$$W + AV + BV' + CV'' + DV''' \ldots \&c. = K$$

quand même les courbes à double courbure données, par lesquelles on seroit obligé de la faire passer & dont le nombre est $= m$, seroient discontinues, & données au hazard dans l'espace.

SUR LA FIGURE DES COLONNES

PAR M. DE LA GRANGE.

1 On a coutume de donner aux colonnes la figure d'un conoide qui ait sa plus grande largeur vers le tiers de sa hauteur, & qui aille de là en diminuant vers les deux extrémités; d'où résulte ce qu'on appelle vulgairement le *renflement* & la *diminution* des colonnes; mais personne que je sache n'a encore donné une raison satisfaisante de cette pratique; car je ne crois pas qu'on puisse regarder comme telle celle que la pluspart des Auteurs, qui ont écrit sur cette matière, apportent, & qui consiste dans la ressemblance qu'ils prétendent qu'une colonne doit avoir avec le corps humain. Il me paroît au contraire qu'il seroit bien plus naturel de faire les colonnes plus minces en haut qu'en bas, & cela à l'imitation des troncs d'arbres qu'on a du nécessairement employer dans les premiers bâtimens; c'est ainsi que les anciens Architectes en ont usé, comme on le voit par les ouvrages antiques qui sont restés à Rome, dans lesquels la plus grande partie des colonnes commencent à avoir leur diminution dès le bas; mais comme Vitruve qui est devenu le legislateur des Architectes modernes, préscrit formellement le *renflement* des colonnes en disant qu'il faut ajouter quelque chose à leur milieu (liv. III chap. 2) quoique par la perte qu'on a faite des figures qui étoient jointes à son ouvrage, on ignore la méthode dont il s'y prenoit pour tracer la ligne du contour des colonnes, l'usage de renfler les colonnes au milieu, & de les diminuer aux deux extrémités est devenu général, & on ne varie plus que sur la courbe qui doit former le renflement & la diminution.

Palladio propose pour cela un moyen mécanique qui consiste à plier tant soit peu une règle de bois; Vignole

donne deux eſpèces de conſtructions géometriques par leſquelles on peut décrire le profil d' une colonne par plusieurs points; enfin M. Blondel a imaginé de faire ſervir à ce deſſein l' inſtrument de Nicomede, en ſorte que le profil de la colonne ait la figure d' une concoide. Il ſeroit très-aiſé d' inventer pluſieurs autres moyens pour remplir le même objet, car tant qu' il n' y a d' autres données que l' epaiſſeur de la colonne aux deux extrémités, & au point du plus grand renflement, il eſt clair que le problême eſt très indéterminé, puiſqu' il ne s' agit que de faire paſſer une ligne courbe & concave vers l' axe par trois points donnés. Mais n' y auroit-il pas dans la nature même de la choſe quelque principe qui pût ſervir à déterminer la queſtion? Parmi ceux qui ſervent de fondement à l'architecture il n' y en a qu'un ſeul qui ait des regles fixes & invariables, & par conſéquent ſuſceptibles de calcul; c' eſt la ſolidité; il faut donc examiner ſi on peut déduire de cette conſidération les conditions néceſſaires pour la détermination & la ſolution du problême dont-il s' agit; c' eſt l' objet du Mémoire qu' on va lire.

2 Comme les colonnes ſont toujours deſtinées à ſupporter des charges plus ou moins conſidérables, ſuivant les circonſtances où on les emploie, il eſt évident que ſi une colonne eſt trop chargée, elle commencera à ſe courber un peu du côté où la matière fera moins de réſiſtance, après quoi elle ſe caſſera faute d' elaſticité, ſurtout ſi c'eſt une colonne de pierre, ou de briques; or il n' eſt pas difficile de comprendre que la courbure ſuivant laquelle la colonne ſe pliera ſera différente ſuivant la figure même de la colonne; de ſorte qu' à hauteurs, & à maſſes égales la force d' une colonne pourra être plus ou moins grande ſuivant la nature de la courbe qui en formera le profil. Ainſi c' eſt un problême de *maximis & minimis* de

déterminer la courbe qui, par ſa rotation autour de ſon axe, formera une colonne capable de ſupporter la plus grande charge poſſible, la hauteur & la maſſe de la colonne étant données; c' eſt là, ce me ſemble, le véritable point de vue, ſous le quel on doit enviſager la queſtion du *renflement*, & de la *diminution* des colonnes.

3 Quoique la théorie de la force des colonnes entant qu' elle dépend de leur figure ait déja fait le ſujet d' un très-beau Mémoire que M. Euler a donné dans le volume de l' Académie de Berlin pour l' année 1757; cependant comme le point de vue ſous leſquel cet illuſtre Auteur a diſcuté cette matière eſt différent de celui dans lequel nous nous propoſons de la traiter, nous croyons faire quelque plaiſir aux Géometres en leur communiquant les recherches que nous avons faites ſur un ſujet, qui intereſſe également la Mécanique & l'Analyſe.

4 Soit $A\ M\ B$ (fig. 1) une colonne dreſſée verticalement en A, & chargée à l' autre extremité B par un poids qui l' oblige à ſe courber infiniment peu, enſorte qu' elle prenne la figure $A\ N\ B$. Suppoſons d' abord que cette colonne ſoit d' une figure cilindrique, & que F ſoit la force abſolue qu' elle a dans chaque point pour réſiſter à être pliée, & qui ſera par conſéquent la même par tout, ſuivant la loi générale des corps élaſtiques, cette force croitra en raiſon de l' angle de courbure; de ſorte que dans l' état $A\ N\ B$, la force de la colonne a un point quelconque N ſera proportionelle à $\frac{K}{\rho}$, en deſignant par ρ le rayon oſculateur de la courbe $A\ N\ B$. D' un autre côté, ſi on nomme P le poids comprimant à l' extrémité B, il eſt facile de voir que le moment de ce poids par rapport au point N ſera exprimé par $P \times M\ N$; de ſorte que la condition de l' equilibre donnera d' abord cette équation $P \times M\ N = \frac{K}{\rho}$ d' où on pourra connoître

tant la nature de la courbe $A\ N\ B$, que la valeur de P.

5 Nommons pour cela les abſciſſes $A\ M = x$, & les ordonnées $M\ N = y$; & comme on ſuppoſe que la courbure de la colonne ſoit partout infiniment petite, on aura y infiniment petit par rapport à x & dy infiniment petit par rapport à $d\,x$; de ſorte que l'élément de la courbe $d\,s = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ſera à tres peu près & ſans erreur ſenſible $= d\,x$. Or on ſait qu'en prenant $d\,x$ conſtant on a $\rho = \frac{ds^3}{-dx\,d\,dy}$; donc on aura dans notre cas $\rho = \frac{dx^2}{-d\,dy}$; par conſéquent l'équation à la courbe $A\,N\,B$ ſera $P\ y = -\frac{K\ d\,dy}{dx^2}$, c'eſt à dire $P\ y + \frac{K\ d\,dy}{d\ x^2} = o$.

Il faudra donc intégrer d'abord cette équation, enſuite faire en ſorte que l'expreſſion de y ſoit nulle aux deux points A, & B, c'eſt-à-dire lorſque $x = o$, & lorſque $x = A\ B$ hauteur de la colonne. Or l'intégration eſt facile, à cauſe que P & K ſont des quantités conſtantes, & l'on aura en général $y = f\ \mathit{ſin.}\ (x\ \sqrt{\frac{P}{K}} + g)$ f & g étant des conſtantes arbitraires; donc ſi on nomme à la hauteur donnée de la colonne, il faudra que l'on ait f ſin $g = o$, & $f\ \mathit{ſin.}\ (\sqrt{\frac{P}{K}} + g) = o$; donc puiſqu'on ne peut pas faire $f = o$, ce qui donneroit $y = o$, il faudra faire d'abord $g = o$, & enſuite il faudra encore que l'on ait $\mathit{ſin.}\ (a\sqrt{\frac{P}{K}}) = o$; & par conſéquent que $a\sqrt{\frac{P}{K}} = m\ \pi$, π étant l'angle de 180°, & m un nombre

quelconque entier ; d'où l'on tire $P = \frac{m^2 \pi^2 K}{a^2}$, l'équation à la courbe $A\,N\,B$ deviendra par la $y = f\,\textit{ſin.}\left(\frac{m\,\pi\,x}{a}\right)$, où la conſtante f demeure arbitraire, & exprime la plus grande valeur de y.

6 Si on fait $m = 1$, on aura $y = f$ ſin $\frac{\pi\,x}{a}$, d'où l'on voit que la courbe $A\,N\,B$ ne coupe l'axe qu'aux deux extrémités A, & B ; & le poids requis pour donner à la colonne cette courbure ſera $\frac{\pi^2 K}{a^2}$. Si $m = 2$, on aura $y = f\,\textit{ſin.}\ \frac{2\,\pi\,x}{a}$, & la courbe coupera l'axe au point où $x = \frac{a}{2}$, c'eſt à dire au point du milieu C, enſorte que la colonne prendra la figure 2 ; mais il faudra pour cela que le poids P ſoit $= \frac{4\,\pi^2 K}{a^2}$, c'eſt-à-dire quadruple du précédent. Si on faiſoit $m = 3$, on auroit $y = f\,\textit{ſin.}\ \frac{3\,\pi\,x}{a}$, de ſorte que la courbe couperoit l'axe aux points où $x = \frac{a}{3}$, & $x = \frac{2\,a}{3}$ & ſeroit ſemblable à la figure 3, or pour que la colonne ſoit pliée de cette manière il faudra que le poids P ſoit $= \frac{9\,\pi^2 K}{a^2}$, c'eſt-à-dire neuf fois plus grand que le premier ; & ainſi de ſuite.

7 Maintenant puiſque le plus petit poids qui ſoit en état de faire plier la colonne eſt $\frac{\pi^2 K}{a^2}$, il ſemble qu' on en peut conclure que tout poids qui ſera moindre que celui-ci ne fera abſolument aucun effet, & qu' ainſi on doit regarder la quantité $\frac{\pi^2 K}{a^2}$ comme la vraie meſure de la force de la colonne cylindrique *A B*. C' eſt par ce principe que M.^r Euler a déterminé dans le Mémoire cité la force de pluſieurs ſortes de colonnes tant cylindriques que paraboloidiques, & ce ſera auſſi ſur le meme principe que nous fonderons nos recherches ſur la figure qu' on doit donner aux colonnes pour qu' elles aient la plus grande force poſſible; mais avant d' en faire uſage il eſt bon d' examiner ce qui doit arriver lorſque le poids ſera un peu différent de $\frac{\pi^2 K}{a^2}$; pour cela il faut déterminer rigoureuſement la nature de la courbe *A N B* ſans negliger la petite différence qu' il y a entre l' elément de l' arc ds, & celui de l' abſciſſe dx.

8 Qu' on ſubſtitue donc dans l' équation $Py = \frac{K}{\rho}$ de l' art. 4 à la place de ρ ſa valeur rigoureuſe $\frac{ds^3}{-dx\,d^2y}$, & l' on aura celle-ci $Py + \frac{K\,dx\,d^2y}{ds^3} = o$ laquelle etant multipliée par dy & enſuite intégrée donne $\frac{Py^2}{2} - \frac{K\,dx}{ds} =$ à une conſtante. Pour determiner cette conſtante ſoit f la plus grande valeur de y, & comme on doit avoir au point du

du *maximum* $dy = o$, & par conséquent $ds = dx$, on aura pour la valeur de la quantité $\frac{Py^2}{2} - \frac{Kdx}{ds}$ dans ce point, $\frac{Pf^2}{2} - K$, qui sera donc la constante cherchée. Ainsi l'équation deviendra $\frac{P}{2}\left(K^2 - y^2\right) = K\left(1 - \frac{dx}{ds}\right)$; mais $dx = \sqrt{ds^2 - dy^2}$; donc $\frac{P}{2}\left(K^2 - y^2\right) = K$ $\left(1 - \frac{\sqrt{(ds^2 - dy^2)}}{ds}\right)$ ou bien en faisant $\frac{dy}{ds} = p$, $\frac{P}{2}$ $\left(f^2 - y^2\right) = K\left(1 - \sqrt{(1 - p^2)}\right)$ d'où l'on tire $p = \sqrt{\left(\frac{P}{K}\left(f^2 - y^2\right) - \frac{P^2}{4K^2}\left(f^2 - y^2\right)^2\right)}$ donc, à cause de $ds = \frac{dy}{p}$, $ds = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{P}{K}(f^2 - y^2) - \frac{P^2}{4K^2}(f^2 - y^2)^2\right)}}$

On integrera donc cette équation en sorte que y soit $= o$ lorsque $s = o$, ensuite on supposera aussi $y = o$ lorsque $s = a$; & cette dernière condition servira à déterminer la valeur de P.

8. Puisque la plus grande valeur de y est f, on peut supposer $y = f \sin. \varphi$, & substituant cette valeur dans l'équation précédente, elle deviendra $ds = \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{P}{K} - \frac{P^2 f^2}{4K^2} \cos. \varphi^2\right)}}$ par laquelle on déterminera la valeur de φ en s; & comme on veut que y soit nul lorsque $s = o$, & lorsque $s = a$ il faudra que φ soit $= o$ lorsque $s = o$, & que $\varphi = m\pi$ lorsque $s = a$. Lorsque $m = 1$ la courbe n'aura qu'un seul ventre comme dans la fig. 1; en faisant $m = 2$ elle aura deux ventres comme dans la fig. 2; & ainsi de suite.

9. Si f eſt une quantité infiniment petite, on a à très peu près $ds = \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{P}{K}}}$, & integrant $s = \frac{\varphi}{\sqrt{\frac{P}{K}}}$; d'où faiſant $s = a$, & $\varphi = m\pi$, on a le même réſultat que ci-deſſus art. 5. Mais ſi f n'eſt pas une quantité infiniment petite, alors l'équation de l'art. préc. n'eſt point ſuſceptible d'une intégrale exacte, car la différentielle $\frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{P}{K} - \frac{P^2 f^2 \cos\varphi^2}{4K^2}\right)}}$ dépend en général de la rectification des ſections coniques. Mais en employant les ſeries on aura

$$ds = \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{P}{K}}}\left(1 + \frac{Pf^2 \cos.\varphi^2}{2.\,4\,K} + \frac{3P^2f^4 \cos.\varphi^4}{2.\,4.\,16\,K^2} + \frac{3.5P^3f^6 \cos.\varphi^6}{2.4.6.\,64\,K^3} + \&c\right)$$

Or les différentielles $\cos.\varphi^2\, d\varphi$, $\cos.\varphi^4\, d.\varphi$ &c.: ſont toutes intégrables, comme l'on ſait, & pour les intégrer il n'y a qu'à changer les puiſſances $\cos.\varphi$ en des coſinus d'angles multiples de φ par les formules connues,

$$\cos.\varphi^2 = \frac{\cos.2\varphi + 1}{2},$$

$$\cos.\varphi^4 = \frac{\cos.4\varphi + 4\cos.2\varphi + \frac{4.\,3.}{2.\,2.}}{8}$$

$$\cos.\varphi^6 = \frac{\cos.6\varphi + 6\cos.4\varphi + \frac{6.\,5}{2}\cos.2\varphi + \frac{6.\,5.\,4}{2.\,2.\,3}}{32}$$

&c.

Mais comme par l'intégration tous les coſinus deviennent des ſinus, il eſt clair qu'en faiſant $\varphi = m\pi$ tous ces termes évanouiront d'eux mêmes; c'eſt pourquoi il ſuffira

pour notre objet de considérer les termes tous constantes des valeurs de $cos.\ \varphi^2$, $cos.\ \varphi^4$ &c.: & de les substituer à la place de ces mêmes valeurs dans l' équation ci-dessus; ce qui la réduira à celle-ci:

$$ds = \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{P}{K}}}\left(1 + \frac{Pf^2}{4\,(8K)} + \frac{9\,P^2 f^4}{4.16\,(32\,K^2)} + \frac{9.25\,P^3 f^6}{4.16.36\,(128\,K^3)} + \&c.\right)$$

qui étant intégrée, donnera après y avoir fait $s = a$, & $\varphi = m\,\pi$,

$$a = \frac{m\pi}{\sqrt{\frac{P}{K}}}\left(1 + \frac{Pf^2}{4\,(8K)} + \frac{9\,P^2 f^4}{4.16\,(32\,K^2)} + \frac{9.25.P^3 f^6}{4.16.36\,(128\,K^3)} + \&c.\right)$$

par où l' on pourra déterminer la valeur de f pour chaque valeur donnée de P & de a.

10. On voit d' abord par l' équation précédente que tant que f n' est pas nul a est nécessairement $> \frac{m\,\pi}{\sqrt{\frac{P}{K}}}$; & par conséquent $P > \frac{m^2\,\pi^2 K}{a^2}$; d' où il s' ensuit que la colonne ne peut être courbée que par une charge plus grande que $\frac{m^2\pi^2 K}{a^2}$. En effet si on met l' équation ci-dessus sous cette forme.

$$1 - \frac{a}{m\,\pi}\sqrt{\frac{P}{K}} + \frac{Pf^2}{4(8K)} + \frac{9\,P^2 f^4}{4.16(32K^2)} + \frac{9.\,25\,P^3 f^6}{4.\,16.36\,(128\,K^3)} + \&c.: = 0$$

& qu' on regarde la valeur de f^2 comme l' inconnue qu' il s' agit de déterminer, il est clair que puisque les quantités P & K sont positives de leur propre nature, la quantité f^2 n' aura que des valeurs négatives, ou imaginaires tant que $1 - \frac{a}{m\pi}\sqrt{\frac{P}{K}} > 0$, que cette quantité

aura une valeur nulle lorſque $1 - \frac{a}{m\pi}\sqrt{\frac{P}{K}} = 0$, toutes les autres étant négatives ou imaginaires ; qu' enfin la quantité f^2 aura toujours une ſeule valeur poſitive lorſque $1 - \frac{a}{m\pi}\sqrt{\frac{P}{K}} < 0$. Donc 1° la quantité f ſera toujours imaginaire lorſque $1 - \frac{a}{m\pi}\sqrt{\frac{P}{K}} > 0$, c' eſt - à - dire $P < \frac{m^2\pi^2 K}{a^2}$. 2° la quantité f aura toujours deux valeurs réelles & égales, mais l' une poſitive & l' autre negative, lorſque $1 - \frac{a}{m\pi}\sqrt{\frac{P}{K}} < 0$, ſçavoir $P > \frac{m^2\pi^2 K}{a^2}$; & n' aura point d' autres valeurs réelles. D' où il s' enſuit que tant que P ſera $< \frac{\pi^2 K}{a^2}$, la colonne ne pourra pas être courbée ; que tant que P ſera renfermée entre les limites $\frac{\pi^2 K}{a^2}$ & $\frac{4\pi^2 K}{a^2}$, la colonne ſera courbée, mais en ne formant qu' un ſeul ventre ; que tant que P ſera entre les limites $\frac{4\pi^2 K}{a^2}$ & $\frac{9\pi^2 K}{a^2}$, la colonne ſera néceſſairement courbée & pourra former ou un ſeul ventre, ou deux ; & ainſi de ſuite.

11. Nous avons donc démontré très-rigoureuſement que la quantité $\frac{\pi^2 K}{a^2}$ eſt la limite des poids que la colonne peut ſupporter ſans ſe plier ; & comme cette quantité eſt égale à la valeur que doit avoir la force P lorſque f eſt nulle, ou ce qui revient au même infiniment petite, il s' enſuit qu' on peut la trouver directement en ſuppoſant d'abord y infiniment petite dans l'équation de la courbe, comme on l' a fait dans l' art. 5, & faiſant enſorte que l' intégrale de cette équation ſatisfaſſe aux deux conditions de $y = 0$

lorſque $s = o$ & $s = a$, ou bien lorſque $x = o$ & $x = a$, parceque dans le cas de y infiniment petite, l' arc s ſe confond ſenſiblement avec l' abſciſſe x. C' eſt de cette manière qu' on pourra déterminer la limite dont il s' agit pour les colonnes qui ne feront pas d' une épaiſſeur uniforme & dont l' équation feroit abſolument intraitable par les méthodes connues ſans la ſuppoſition de y infiniment petite.

12. En effet, ſi on ſuppoſe que la colonne ne ſoit pas cylindrique, mais qu' elle ait la forme d' un conoide formé par la rotation d' une courbe quelconque autour de ſon axe, lequel ſera par conſéquent auſſi l' axe de la colonne, & qu' on nomme z l' ordonnée de cette courbe qui répond à une abſciſſe quelconque x, enſorte qu' on ait une équation entre z & x, qui ſerve à déterminer z en x; il eſt clair que $2z$ ſera le diamêtre de la groſſeur de la colonne à la hauteur x depuis la baſe, & il n' eſt pas moins évident que la force abſolue avec laquelle la colonne réſiſtera dans cet endroit à être courbée ſera d' autant plus grande que la quantité $2z$ ſera plus grande; de manière que cette force pourra être regardée comme une fonction de z & per conſéquent auſſi comme une fonction de x, que nous déſignerons en général dans la ſuite par X. Ainſi il n' y aura qu' à mettre ſimplement X à la place de K dans l' équation de l' art. 5, & l' on aura

$$Py + \frac{X d^2 y}{d x^2} = o$$

par l' équation de la courbe ſuivant laquelle la colonne ſera pliée par le poids P dont on la ſuppoſe chargée, en ſuppoſant que cette courbe ſoit infiniment peu différente de la ligne droite.

13. Or puiſque dans le cas ou X étoit une quantité conſtante K on a trouvé en général pour la valeur de y

cette expression $y = f\, \textit{sin.}\left(x \sqrt{\frac{P}{K}} + g\right)$, supposons maintenant $y = \xi\, \textit{sin.}\, \varphi$, ξ, & φ étant des fonctions inconnues de x, & l'on aura en différentiant $dy = \textit{sin.}\, \varphi\, d\xi + \xi\, \cos.\, \varphi\, d\varphi$, $d^2y = \textit{sin.}\, \varphi\, d^2\xi + 2 \cos.\, \varphi\, d\varphi\, d\xi + \xi \cos.\, \varphi\, d^2\varphi - \xi\, \textit{sin.}\, \varphi\, d\varphi^2$; donc substituant ces valeurs dans l'équation de l'art. préc. on aura

$$\left(P\xi + X\left(\frac{d^2\xi}{dx^2} - \frac{\xi d^2\varphi}{dx^2}\right)\right) \textit{sin.}\, \varphi$$

$$+ X\left(\frac{2 d\varphi\, d\xi}{dx^2} + \frac{\xi d^2\varphi}{dx^2}\right) \cos.\, \varphi = 0$$

Comme nous avons introduit deux variables indéterminées ξ & φ, nous pouvons faire disparoître dans cette équation les *sin.* & *cos.* de φ, en la partageant en ces deux-ci

$$P\xi + X\left(\frac{d^2\xi}{dx^2} - \frac{\xi d\varphi^2}{dx^2}\right) = 0$$

$$\frac{2 d\varphi\, d\xi}{dx^2} + \frac{\xi d^2\varphi}{dx^2} = 0$$

la seconde étant multipliée par ξdx, & ensuite intégrée donne $\frac{\xi^2 d\varphi}{dx} = h$, d'où l'on tire $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{h}{\xi^2}$ & $\varphi = h \int \frac{dx}{\xi^2}$, h étant une constante arbitraire. Substituant cette valeur dans la première équation elle deviendra

$$P\xi + X\left(\frac{d^2\xi}{dx^2} - \frac{h^2}{\xi^3}\right) = 0$$

par laquelle il faudra déterminer la variable ξ; ensuite de quoi on aura $y = \xi\, \textit{sin.}\left(h \int \frac{dx}{\xi^2}\right)$.

Soit pour plus de simplicité $\xi^2 = hu$, on aura en substituant cette valeur dans l'équation en ξ celle-ci:

$$4 P u^2 + X\left(\frac{2ud^2u - du^2}{dx^2} - 4\right) = 0$$

& la valeur de y sera $y = \sqrt{(hu)}.\ \textit{sin.} \int \frac{dx}{u}$.

14 On remarquera d'abord à l'égard de cette expreſſion de y qu'elle contient deux conſtantes arbitraires, l'une c'eſt la conſtante h qui ne ſe trouve point dans l'équation en u; l'autre c'eſt celle qui eſt virtuellement renfermée dans l'intégrale $\int \frac{dx}{u}$, c'eſt pourquoi il ſuffira d'y ſubſtituer une valeur quelconque de u qui ſatisfaſſe à l'équation en u ſans s'embaraſſer ſi elle eſt une intégrale complette de cette équation ou non.

Un autre avantage de la même expreſſion de y, c'eſt qu'elle eſt très-commode pour la détermination du poids P; car ſuivant les conditions du problême il faut, 1.° que y ſoit $= 0$ lorſque $x = o$, condition qu'on remplira en prenant l'intégrale de $\int \frac{dx}{u}$ enſorte qu'elle évanouiſſe lorſque $x = o$. 2.° Il faut que y ſoit auſſi $= o$ lorſque $x = a$; & pour remplir cette condition il faudra que la valeur de l'intégrale $\int \frac{dx}{u}$ qui répond à $x = a$ ſoit $= m\,\pi$; car alors $\mathit{ſin.} \int \frac{dx}{u}$ ſera nul. Or comme la quantité u ne doit point contenir de conſtantes arbitraires, il eſt viſible que cette dernière condition donnera une équation entre les quantités P & a, par laquelle on pourra déterminer P.

Quant au nombre entier m qui demeure indéterminé, il eſt clair, par ce qu'on a vu plus haut, qu'il ſera toujours égal au nombre des ventres que la colonne formera en ſe courbant par la preſſion du poids P; donc pour avoir la limite des fardeaux que la colonne pourra ſupporter ſans ſe courber d'une manière quelconque, il faudra toujours prendre pour m le nombre entier qui rendra la valeur de P la plus petite; & cette valeur ſera la limite cherchée.

15

15. L'hypothese la plus simple qu'on puisse faire sur la figure des colonnes lorsqu'elles ne doivent pas être cylindriques, est de les supposer formées par la rotation d'une section conique autour de son axe; or l'équation générale d'une section conique où les abscisses sont prises dans l'axe, est comme l'on sait $z^2 = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, x étant les abscisses, & z les ordonnées; & α, β, γ étant des constantes arbitraires; ainsi nous adopterons d'abord cette équation entre les variables z & x, & nous chercherons quelle est la valeur de P qui en résultera; mais pour cela il faut encore établir la loi qui doit avoir lieu entre les rayons z & la force X avec laquelle la colonne résiste à se courber (art. 12).

16. Il paroit que la théorie & l'expérience s'accordent assès à faire X proportionelle à z^4; comme on peut le voir par les ouvrages où cette matière est traitée; ainsi nous supposerons en général $X = K z^4$; ce qui donnera dans le cas de l'art. préc. $X = K(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2$; ce qui étant substitué dans l'équation en u de l'art. 13 on aura $4 P u^2 + K(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2 \left(\frac{2ud^2 u - du^2}{dx^2}) - 4\right) = 0$ équation à laquelle on peut satisfaire en faisant $u = g(\alpha + \beta x + \gamma x^2) = g z^2$; car on aura $\frac{2ud^2 u - du^n}{dx^2} = 4 g^2 \gamma (\alpha + \beta x + \gamma x^2) - g^2 (\beta + 2\gamma x)^2 = g^2 (4\alpha\gamma - \beta^2)$; de sorte qu'après les substitutions on aura $4 P g^2 + K (g^2 (4\alpha\gamma - \beta^2) - 4) = 0$ d'où l'on tire

$$g = \sqrt{\left(\frac{1}{K} + \alpha\gamma - \frac{\beta^2}{4}\right)}.$$

Cette valeur de u n'est, comme l'on voit, qu'une intégrale particulière; mais elle suffit pour notre objet, comme on l'a fait voir plus haut (art. 14).

Main-

17 Maintenant on aura $\int \frac{dx}{u} = \int \frac{dx}{g\,(\alpha + \beta\,x + \gamma\,x^2)}$; donc ſi on nomme A l'intégrale de $\frac{dx}{\alpha + \beta\,x + \gamma\,x^2}$ c'eſt-à-dire de $\frac{dx}{z^2}$, priſe enſorte qu' elle ſoit nulle lorſque $x = o$ & complette lorſque $x = a$, on aura $\frac{A}{g}$ pour la valeur de $\int \frac{du}{u}$ répondante à $x = a$; on fera donc (art. 14) $\frac{A}{g} = m\,\pi$; & on tirera de la

$$P = \left(\frac{\beta^2}{4} - \alpha\,\gamma + \frac{m^2\,\pi^2}{A^2} \right) K$$

Telle eſt donc la valeur du poids P qui pourra faire plier la colonne infiniment peu, & comme cette valeur augmente à méſure que le nombre m eſt plus grand, on fera $m = 1$, pour avoir la limite des poids qui pourront être ſupportés par la colonne ſans qu' elle ſoit ſujette à ſe courber en aucune manière; ainſi la force de la colonne ſera d' autant plus grande que la valeur de P ſera plus grande; d' où l'on voit que la force augmentera à méſure que la quantité $\frac{\beta^2}{4} - \alpha\,\gamma$ croitra, & que la quantité A décroitra; ainſi ce ſera une queſtion de *maximis & minimis* de déterminer les valeurs des conſtantes α, β, γ pour que la force P ſoit la plus grande; mais comme cette force doit néceſſairement augmenter à méſure que les dimenſions de la colonne augmentent, on ne peut chercher qu' un *maximum* rélatif à la maſſe de la colonne, en ſuppoſant ſa hauteur donnée; c' eſt ſous ce point de vue que nous allons enviſager la queſtion.

18 Pour commencer par les cas les plus ſimples nous ſuppoſerons d' abord, que l'on ait $\frac{\beta^2}{4} - \alpha' \gamma = o$, auquel cas l' équation du profil de la colonne deviendra $z^2 = (\sqrt{\alpha} + x\sqrt{\gamma})^2$, & tirant la racine carrée $z = \sqrt{\alpha} + x\sqrt{\gamma}$, qui eſt à une ligne droite; enſorte que dans ce cas la figure de la colonne ſera celle d' un cone tronqué; faiſons pour plus de commodité, $\sqrt{\alpha} = b$, $\sqrt{\gamma} = c$, & par conſéquent $\beta = 2\ b\ c$; on aura donc $z = b + c \cdot x$ & l' intégrale de $\frac{dx}{z^2}$ priſe de manière qu' elle ſoit nulle lorſque $x = o$, ſera $- \frac{1}{c}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{b}\right)$; donc faiſant $x = a$ on aura $A = - \frac{1}{c}\left(\frac{1}{b + ca} - \frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b(b+ca)} = \frac{a}{b\,b\,1}$, en faiſant $b' = b + ca$; où l' on remarquera que b eſt le rayon de la baſe inférieure de la colonne, & b' celui de la baſe ſupérieure; ainſi on aura dans ce cas $P = \frac{\pi^2 K\, b^2\, b'^2}{a^2}$.

Maintenant pour avoir la ſolidité de la colonne on remarquera que l' aire du cercle dont le rayon eſt z, étant exprimée par πz^2, il n' y aura qu' à prendre l' intégrale de $\pi z^2 dx$, depuis $x = o$ juſqu' à $x = o$, laquelle ſera $\frac{\pi}{3c}\left((b + ca)^3 - b^3\right)$, c' eſt-à-dire (à cauſe de $b + ca = b'$ & $c = \frac{b' - b}{a}$) $\frac{\pi a}{3}(b^2 + bb' + b'^2)$. Ainſi le rapport du poids que la colonne eſt en état de ſupporter au carré du poids même de la colonne ſera exprimé par $\frac{9\ K\, b^2\, b'^2}{a^4\,(b^2 + b\,b' + b'^2)^2}$ quantité qui ne dépend que du rapport des rayons b & b' des deux baſes; en

effet faiſant $\frac{b'}{b} = r$, la quantité précédente deviendra $\frac{9\,K\,r^2}{a^4\,(1 + r + r^2)^2} = \frac{9\,K}{a^4\,(1+r+\frac{1}{r})^2}$.

Cette quantité ſera donc la plus grande lorſque la valeur de $1 + r + \frac{1}{r}$ ſera la plus petite, ce qui aura lieu, en faiſant $d\,r - \frac{dr}{r^2} = o$, ou bien $1 - \frac{1}{r^2} = o$ ſavoir $r = 1$, & par conſéquent $b = b'$. D' où l' on doit conclure que la force d' une colonne de figure conique, relativement à ſa ſolidité, ſera toujours la plus grande lorſque les deux baſes ſeront égales, c' eſt-à-dire lorſque la colonne ſera cylindrique. Ainſi pour cette conſidération les colonnes cylindriques doivent être préférables aux coniques.

19 Nommons en général s la ſolidité de la colonne, qui eſt égale à l' intégrale de $\pi\, z^2\, d\, x$ priſe de manière qu' elle ſoit nulle lorſque $x = o$, & complette lorſque $x = a$, & le rapport de P à S^2, c' eſt-à-dire la valeur de $\frac{P}{S^2}$ pourra être regardée comme exprimant la force relative d' une colonne; cette force ſera donc, pour les colonnes coniques, où les diamêtres des baſes ſont entr' elles comme r à 1, $= \frac{9\,K}{a^4\,(1 + r + \frac{1}{r})^2}$, & pour les colonnes cylindriques $= \frac{K}{a^4}$; ce qui ſert à déterminer la valeur de la conſtante K; c' eſt pourquoi ſi on fait $K = a^4 F$, la conſtante F exprimera la force relative d' une colonne cylindrique de même hauteur.

20 Suppoſons maintenant $\gamma = o$, ce qui donnera $z^2 = \alpha + \beta\, x$ qui eſt l' équation d' une parabole, l' intégrale de $\frac{dx}{z^2} = \frac{dx}{\alpha + \beta\, x}$ ſera en général $\frac{1}{\beta}\, l.\, (\alpha + \beta x)$;

d'où en complétant & faisant $x = a$ on aura $A = \frac{1}{\beta} l. \left(1 + \frac{\beta a}{\alpha}\right)$; donc $P = \left(\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{l.^2 \left(1 + \frac{\beta a}{\alpha}\right)}\right) \beta^2 K$.

Maintenant pour avoir s on intégrera la formule $\pi z^2 dx = \pi (\alpha + \beta x) dx$, & complétant l'intégrale comme on l'a enseigné plus haut on aura $s = \pi \left(\alpha + \frac{\beta a}{2}\right) a$; donc

$$\frac{P}{s^2} = \frac{K}{a^2 \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{a}{2}\right)^2} \times \left(\frac{1}{4 \pi^2} + \frac{1}{l.^2 \left(1 + \frac{\beta a}{\alpha}\right)}\right).$$

Faisons $\frac{\beta a}{\alpha} = r$, & mettons $F a^4$ à la place de K, on aura pour la force relative de la colonne parabolique l'expression $\frac{P}{S^2} = \frac{F}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{r}\right)^2} \times \left(\frac{1}{4 \pi^2} + \frac{1}{l.^2 (1 + r)}\right)$, F étant celle de la colonne cylindrique de même hauteur.

21 Cherchons le *maximum* de cette expression, & la différentiation donnera cette équation transcendente en r $\frac{l.^3 (1 + r)}{4 \pi^2} + l. (1 + r) = \frac{r (2 + r)}{2 (1 + r)}$; d'où il faudra tirer r. Pour y parvenir je fais $l. (1 + r) = t$; & par conséquent $r = e^t - 1$; j'aurai en substituant

$$\frac{t^3}{4 \pi^2} + t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Je réduis en série les quantités exponentielles, ce qui me donne $\frac{e^t - e^{-t}}{2} = t + \frac{t^3}{2 . 3} + \frac{t^5}{2 . 3 . 4 . 5} + \&c.$ de sorte que l'équation deviendra

$$\left(\frac{1}{2 . 3} - \frac{1}{4 \pi^2}\right) t^3 + \frac{t^5}{2 . 3 . 4 . 5} + \frac{t^7}{2 . 3 . . 7} + \&c. = 0$$

Cette équation donne d'abord $t = o$, ensuite étant divisée par t^3 elle devient

$$\frac{1}{2.\,3} - \frac{1}{4.\,\pi^2} + \frac{t^2}{2.\,3.\,4.\,5} + \frac{t^4}{2.\,3.\,.\,.\,7} + \&c. = o$$

laquelle, à cause de $\pi > 3$, aura tous ses termes positifs, ensorte que comme elle ne contient que des puissances paires de t, elle ne pourra avoir aucune racine réelle, puisque t^2 ne sauroit avoir aucune valeur réelle positive. Ainsi $t = o$ sera la seule racine réelle de l'équation dont il s'agit, par conséquent la valeur cherchée de r sera aussi $= o$; ce qui donnera $\frac{\beta a}{\alpha} = o$ & par conséquent $\beta = o$ c'est-à-dire la colonne cylindrique. Faisons donc $r = o$ dans l'expression de $\frac{P}{S}$, ou plutôt r infiniment petit & elle se réduira à F; or si on donnoit à r une toute autre valeur, comme si on faisoit $r = \infty$, on trouveroit $\frac{P}{S} = \frac{F}{\pi^2}$ valeur moindre que la précédente; ce qui prouve que le cas de $r = o$ est celui du *maximum*; d'où il faut conclure que la force est toujours plus grande dans les colonnes cylindriques que dans les paraboliques.

22 Considérons présentement l'équation générale $z^2 = \alpha + \beta\, x + \gamma\, x^2$ laquelle représente une section conique quelconque rapportée à l'un des axes, & faisant $\beta = 2\, b\, \gamma$, $\alpha = c\, \gamma$, on pourra la mettre sous cette forme $z^2 = \gamma\, ((x + b)^2 + c - b^2)$ laquelle, si $c - b^2$ est une quantité négative, représentera une hyperbole rapportée à son grand axe lorsque γ est positive, & une ellipse lorsque γ est négative; mais si $c - b^2$ est une quantité positive, γ deura être positive & l'équation sera à une hyperbole rapportée à son axe conjugé ensorte que la colonne, au lieu d'être renflée, se trouvera diminuée au

milieu. C' eſt pourquoi il ſuffira d' examiner le premier cas où $c - b^2 = - r^2$, en ſorte que l' on ait $z^2 = \gamma ((x + b)^2 - r^2)$; & nous remarquerons d' abord ici que puiſque la hauteur de la colonne eſt $= a$, il faut, pour que la courbe qui répond à la portion d' axe a ſoit toute réelle, que l' on ait 1°, ſi $\gamma > 0$, $b = o$ $u > r$ (r & ſuppoſée une quantité poſitive) 2° ſi $\gamma < o$, $\pm b < r$, & $a + b < r$; ($\pm b$ dénotant la valeur de b priſe poſitivement).

Cela poſé on aura $\frac{dx}{z^2} = \frac{dx}{2\gamma r(x+b-r)} - \frac{dx}{2\gamma r(x+b+r)}$, dont l' intégrale priſe enſorte qu' elle evanouiſſe lorſque $x = o$ ſera $\frac{1}{2\gamma r}\ l. \left(\frac{x+b-r}{x+b+r} \times \frac{b+r}{b-r}\right)$; donc faiſant $x = a$, on aura $A = \frac{1}{2\gamma r}\ l. \left(\frac{a+b-r}{a+b+r} \times \frac{b+r}{b-r}\right)$; de là à cauſe de $\frac{\beta^2}{4} - \alpha\gamma = \gamma^2 (b^2 - c) = \gamma^2 r^2$, l' expreſſion P deviendra (article 17) $P = \gamma^2 r^2$

$$\left\{1 + \frac{4\pi^2}{l.^2\left(\frac{a+b-r}{a+b+r} \times \frac{b+r}{b-r}\right)}\right\} K.$$

23 Il ne reſte plus qu' à trouver la valeur de S par l'intégration de la formule $\pi z^2\, dx = \pi\gamma\ ((x+b)^2 - r^2)\, dx$, laquelle donne l' intégrale $\pi\gamma \cdot \left(\frac{(x+b)^3 - b^3}{3} - r^2 x\right)$ $= \pi\gamma x \left(\frac{x^2}{3} + x b + b^2 - r^2\right)$; de ſorte qu' en faiſant $x = a$, on aura $S = \pi\gamma a \left(\frac{a^2}{3} + a b + b^2 - r^2\right)$;

donc enfin $\frac{P}{S^2} = \dfrac{\left\{\frac{1}{\pi^2} + \frac{4}{l.^2\left(\frac{a+b-r}{a+b+r} \times \frac{b+r}{b-r}\right)}\right\} \frac{K r^2}{a^2}}{\left(\frac{}{3} + a b + b^2 - r^2\right)^2}$

Faisons encore $b = pa$, $r = qa$, & mettons F à la place de $\frac{K}{a^4}$ on aura

$$\frac{P}{s^2} = \frac{\left\{ \frac{1}{\pi^2} + \frac{4}{l.^2 \left(\frac{1+p-q}{1+p+q} \times \frac{p+q}{p-q} \right)} \right\} F q^2}{\left(\frac{1}{3} + p + p^2 - q^2 \right)^2},$$

expression qui peut se simplifier encore en supposant $p + p^2 - q^2 = t$ ce qui la réduira à celle-ci :

$$\frac{F q^2 \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{4}{l.^2 \left(\frac{t+q}{t-q} \right)} \right)}{\left(\frac{1}{3} + t \right)^2},$$

qui ne contient que deux indéterminées t & q.

24. Puisque $q = \frac{r}{a}$, il est clair que la quantité q devra toujours être positive; voyons donc d'abord qu'elle sera la valeur de q qui rendra l'expression précédente au *maximum*. Pour cela il suffit de rendre un *maximum* la quantité $q^2 \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{4}{l.^2 \left(\frac{t+q}{t-q} \right)} \right)$; dont la différentielle logarithmique étant égale à zéro donnera l'équation

$$\frac{1}{q} - \frac{8t}{(t-q)^2} \times \frac{1}{\frac{1}{\pi^2} l.^3 \left(\frac{t+q}{t-q} \right) + 4\, l. \left(\frac{t+q}{t-q} \right)} = 0$$

d'où il faudra tirer le valeur de q.

Faisons pour cela $l. \left(\frac{t+q}{t-q} \right) = z$ donc $\frac{t+q}{t-q} = e^z$, & $q = \frac{e^z - 1}{e^z + 1} t$, l'équation précédente deviendra

$\frac{z^3}{\pi^2} + 4z = \frac{8qt}{(t-q)^2} = 2\left(e^{2z} - 1\right)$; donc réduiſant l' exponentielle e^{2z} en ſérie on aura l' équation

$$z^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2\pi^2}\right) z^3 + \frac{16}{2.3.4} z^4 + \&c. = 0$$

laquelle donne d' abord $z = o$, & à cauſe que tous ſes termes ſont poſitifs ne ſauroit avoir aucune racine réelle plus grande que zéro. Mais nous allons prouver que cette équation ne peut avoir non plus de racine réelle négative. Pour cela je reprends la forme $\frac{z^3}{2\pi^2} + 2z = e^{2z} - 1$;

& je fais $z = -\frac{u}{2}$, j' aurai celle-ci: $\frac{u^3}{16\pi^2} = 1 - u - \frac{1}{e^u}$.

Il eſt viſible qu' en faiſant $u = o$, les deux membres de cette équation deviennent nuls à la fois, & par conſéquent égaux entr' eux; mais à méſure que u augmente, le premier membre augmente auſſi, & le ſecond diminue; donc il ſera impoſſible que l' équation puiſſe jamais avoir lieu tant que u ſera > 0; pour prouver que le ſecond membre diminue à méſure que u augmente il n' y a qu'à prendre ſa différentielle, laquelle eſt $-\left(1 - \frac{1}{e^u}\right) du$; or comme e eſt > 1 il eſt viſible que e^u ſera toujours auſſi > 1 tant que $u > 0$ dont $1 - \frac{1}{e^u}$ ſera toujours un nombre poſitif, par conſéquent la différentielle dont il s' agit ſera toujours négative; donc &c.

25. Nous venons donc de démontrer qu' il n' y a qu'une ſeule valeur réelle de z ou de $l. \frac{t+q}{t-q}$ qui puiſſe rendre la formule propoſée un *maximum* ou un *minimum*; cette valeur eſt $l. \frac{t+q}{t-q} = 0$, d' où l' on tire $\frac{t+q}{t-q} = 1$,

& de

& de la $q = o$. Qu' on faſſe donc dans l' expreſſion de $\frac{P}{s^2}$, $q = o$, ou ſeulement infiniment petit, elle deviendra, à cauſe de $l.\left(\frac{t+q}{t-q}\right) = l\,\frac{1+\frac{q}{t}}{1-\frac{q}{t}} = \frac{2q}{t}$ à très-peu près, $\frac{P}{s^2} = \frac{F\,t^2}{\left(\frac{1}{3}+t\right)^2}$; pour voir maintenant ſi cette valeur eſt un *maximum* ou un *minimum*, qu'on faſſe par exemple $q = t$ on aura $l\frac{t+q}{t-q} = l\,\infty = \infty$; de ſorte que l'expreſſion de $\frac{P}{s^2}$ ſe réduira à celle-ci $\frac{F\,t^2}{\pi^2\left(\frac{1}{3}+t\right)^2}$, qui eſt évidemment plus petite que la précédente, à cauſe de $\pi > 1$.

Quant aux valeurs imaginaires de z, c' eſt-à-dire de $l.\frac{t+q}{t-q}$, il eſt clair qu' elles doivent être rejetées, parce-qu' elles rendroient toute la valeur de $\frac{P}{s^2}$ imaginaire, il n' y a que le ſeul cas où z ſeroit de la forme $\mu\sqrt{-1}$, dans lequel $\frac{P}{s^2}$ auroit néanmoins une valeur réelle; or ce cas aura lieu quand $\frac{t+q}{t-q} = -1$, c' eſt-à-dire lorſque $q = \infty$: car alors on aura $l.\frac{t+q}{t-q} = l - 1 = \pi\sqrt{-1}$ & l' expreſſion de $\frac{P}{s^2}$ deviendra $\frac{F\,q^2\left(\frac{1}{\pi^2}-\frac{4}{\pi^2}\right)}{\left(\frac{1}{3}+t\right)^2}$ laquelle eſt, à la vérité, toute réelle; mais comme elle eſt en même tems négative, ce qui eſt abſurde, on voit que le cas dont-il s' agit doit être également rejeté.

26. Le *maximum* de la quantité $\frac{P}{S^2}$ aura donc lieu uniquement lorſque $q = o$, ce qui donne $r = o$, & par conſéquent $z^2 = \gamma\ (x + b)^2$ pour l'équation de la courbe, ce qui rentre dans le cas de l'art. 18, où la colonne étoit ſuppoſée conique ; d'où il s'enſuit que la figure conique dans les colonnes eſt préférable à la figure renflée qui proviendroit de la revolution d'une ſection conique autour de ſon axe. Mais ſi on veut que la colonne ait la plus grande force poſſible, il faudra lui donner la figure cylindrique, comme nous l'avons démontré plus haut (art. cité).

27. Je n'examinerai pas ici quelle eſt la force des colonnes qui ſont formées par d'autres courbes que des ſections coniques ; parceque d'un côté l'équation en u de l'art. 13 eſt rarement intégrable, & que de l'autre la conſidération de pluſieurs cas particuliers ne pourroit jamais conduire à une concluſion vraiment générale. Je vais tacher plutôt de reſoudre la queſtion propoſée d'une manière directe & générale, en cherchant immédiatement la courbe qui, par ſa rotation autour de ſon axe, produira une colonne qui ait la plus grande force poſſible ; problême d'un genre aſſès neuf, & dont la ſolution demande des artifices particuliers qui pourront même être utiles dans d'autres occaſions.

28. Voici en quoi conſiſte ce problême exprimé analytiquement : *il s'agit de trouver une équation entre les ordonnées* z *& les abſciſſes* x, *telle que la quantité* $\frac{P}{S^2}$ *ſoit la plus grande qu'il eſt poſſible*, s *étant égale à l'intégrale* $\pi \int z^2\, dx$ *priſe depuis* $x = o$, *juſqu'à* $x = o$, *& P étant une conſtante qui doit être déterminée par cette condition, que l'intégrale* $\int \frac{dx}{u}$ *priſe enſorte qu'elle ſoit nulle lorſque*

$x = o$, devienne $= \pi$ lorsque $x = a$, en supposant u donnée par l'équation différentielle

$4 P u^2 + X \left(\frac{2 u d^2 u - d u^2}{d x^2} - 4 \right) = o$ *où X est une fonction donnée de z que nous avons supposée plus haut $= K z^4$.*

On voit que ce qui rend surtout le problême difficile, c'est que la quantité u n'est pas donnée en P, & en z, en termes finis; mais supposons pour un moment que ce soit une fonction connue de z, & de P, ensorte que $d u = M d z + N d P$, en faisant aussi P variable, dans ce cas voici comment on pourra s'y prendre.

Puisque $\frac{P}{S^2}$ doit être un *maximum* on aura d'abord en différentiant & employant la caractéristique δ, $\frac{\delta P}{P} + \frac{2 \delta S}{S} = o$; Or puisque $\int \frac{dx}{u} =$ à une quantité donnée π laquelle est indépendante de P, on aura aussi en différentiant $- \int \frac{dx\, \delta u}{u^2} = o$, & mettant pour δu sa valeur $M \delta z + N \delta P$, $\int \frac{M \delta z\, d x}{u^2} + \int \frac{N \delta P\, d x}{u^2} = o$; mais P étant une constante par rapport à x, on pourra mettre sa différentielle δP hors du signe d'intégration, ce qui donnera l'équation $\int \frac{M \delta z\, d x}{u^2} + \delta P \int \frac{N d' x}{u^2} = o$ d'où l'on tire

$\delta P = - \frac{\int \frac{M \delta z\, d x}{u^2}}{\int \frac{N d x}{u^2}}$ ces intégrales étant prises depuis $x = o$, jusqu'à $x = a$.

Quant à la valeur de δs, puisque $s = \pi \int z^2 dx$; on aura $\delta s = 2 \pi \int z \delta z dx$; donc substituant ces valeurs de δP, & de δs dans l'équation ci-dessus, on aura celle-ci : $\pi \int \frac{z \delta z dx}{S} - \frac{\int \frac{M \delta z dx}{u^2}}{\int \frac{N dx}{u^2}} = o$.

Dénotons par R la quantité $\int \frac{N dx}{u^2}$ qui peut être regardée comme une constante, & nous aurons l'équation $\int \left(\frac{\pi z}{S} - \frac{M}{u^2 R}\right) \delta z dx = o$, laquelle donne $\frac{\pi z}{S} - \frac{M}{u^2 R} = o$. Or comme u est supposée une fonction de z & de constantes, que M est par conséquent aussi une fonction de z & de constantes, & que S & R sont aussi des constantes, il s'ensuit que cette équation donnera $z =$ à une constante ; mais il faut que cette valeur de z satisfasse aussi à l'équation en u ; or comme u est (hyp.) une fonction de z & P on aura aussi $u =$ à une constante ; donc l'équation dont nous parlons deviendra $4 P u^2 - 4 X = o$, ou $4 P u^2 - X = o$; laquelle pourra toujours se verifier lorsque X sera une fonction de z, comme nous l'avons supposé.

Au reste comme cette solution est fondée sur l'hypothèse particulière de u égal à une fonction de z, il s'en faut beaucoup qu'on puisse la regarder comme exacte & complette ; aussi n'est elle ici que comme une introduction à la solution générale que nous allons donner dans les articles suivans.

29. Nous aurons d'abord comme ci-dessus les deux équations $\frac{\delta P}{P} - \frac{2 \delta s}{S} = o$, $\int \frac{dx \delta u}{u^2} = o$, & de

plus nous aurons auſſi l' équation $\delta s = 2\pi \int z \, \delta z \, dx$; & il ne reſtera plus qu' à trouver une équation entre $\delta P.$, δu, & δz. Pour cela je reprends l' équation en u, & pour la rendre plus traitable, je la ramene à ſa première forme, en faiſant $u = t^2$, ce qui la réduit à celle-ci $Pt + X\left(\frac{d^2 t}{dx^2} - \frac{1}{t^3}\right) = o$ laquelle eſt moins chargée de différentielles que celle en u; maintenant je la différentie en affectant les différentielles de la caractériſtique δ & faiſant varier à la fois t, P & z, j' aurai

$$P\delta t + t\delta P + \left(\frac{d^2 t}{dx^2} - \frac{1}{t^3}\right)\delta X + X\left(\frac{\delta d^2 t}{dx^2} + \frac{3\delta t}{t^4}\right) = o$$

mais puiſque X eſt ſuppoſée une fonction de z on aura $dX = X' dz$, & par conſéquent auſſi $\delta X = X' \delta z$; de plus on a par les principes de la méthode *des variations*, expoſée dans les tomes II, & IV, $\delta d^2 t = d^2 \delta t$; donc ſubſtituant ces valeurs & mettant de plus $-\frac{Pt}{X}$ à la place de $\frac{d^2 t}{dx^2} - \frac{1}{t^3}$, on aura cette équation

$$P\delta t + t\delta P - \frac{Pt X' \delta z}{X} + X\left(\frac{d^2 \delta t}{dx^2} - \frac{3\delta t}{t^4}\right) = o$$

c' eſt-à-dire

$$\left(P - \frac{3X}{t^4}\right)\delta t + X\frac{d^2 \delta t}{dx^2} + t\,\delta P - \frac{PX' t \delta z}{X} = o$$

Je multiplié maintenant cette équation par $\alpha\, dx$, α étant une nouvelle indéterminée, & je l' intégre en faiſant diſparoître, par des intégrations partielles, les différences de δt, j' aurai

$$\int\left(\left(P - \frac{3X}{t^4}\right)\alpha + \frac{d^2(X\alpha)}{dx^2}\right)\delta t\, dx$$

$$+ \frac{X\alpha\, d\delta t}{dx} - \frac{d.(X\alpha)\delta t}{dx}$$

$$+ \delta P \int t\alpha\, dx - P\int \frac{t\alpha X' \delta z}{X}\, dx = \text{à une conſtante.}$$

Je ſuppoſe ce qui eſt permis que la quantité α ſoit telle que l'on ait

$\left(P - \frac{3X}{t^4}\right)\alpha + \frac{d.^2\,(X\alpha)}{dx^2} = \frac{H}{t^3}$, (H étant une conſtante quelconque) & l'équation précédente deviendra

$$h\int\frac{\delta t\,dx}{t^3} + \frac{X\alpha\,d\,\delta t}{dx} - \frac{d.\,(X\alpha)\,\delta t}{dx} + \delta P\int t\,\alpha\,dx$$

$- P\int\frac{t\,\alpha\,X'\,\delta z}{X}\,dx =$ à une conſt., où je remarque qu'à cauſe de $t^2 = u$, on aura $\int\frac{\delta t\,dx}{t^3} = \int\frac{\delta u\,dx}{u^2}$; Donc ſi on étend l'intégration de l'équation précédente depuis $x = o$, juſqu'à $x = a$, on aura la valeur de l'intégrale $\int\frac{\delta u\,dx}{u^2}$ laquelle devra être nulle par les conditions du problême.

Pour cela je nomme B la valeur totale de l'intégrale $\int t\,\alpha\,dx$ priſe depuis $x = o$ juſqu'à $x = a$, enſuite je nomme Π & Ψ les valeurs des termes $\frac{X\alpha\,d\,\delta t}{dx} - \frac{d.(X\alpha)}{dx}\,\delta t$ pour le point où $x = o$, & pour celui où $x = a$; j'aurai donc à cauſe de $\int\frac{\delta t\,dx}{t^3} = \int\frac{\delta u\,dx}{u^2} = o$, l'équation $\Pi - \Psi + B\,\delta P - P\int\frac{t\,\alpha\,X'\,\delta z}{X}\,dx = o$ d'où l'on tire d'abord

$$\frac{\delta P}{P} = \frac{\Psi - \Pi}{B\,P} + \frac{1}{B}\int\frac{t\,\alpha\,X'\,\delta z}{X}\,dx$$

l'intégrale $\int\frac{t\,\alpha\,X'\,\delta z\,dx}{X}$ étant auſſi ſuppoſée priſe depuis $x = o$ juſqu'à $x = a$.

Donc ſi on ſubſtitue cette valeur de δP, ainſi que celle de δS dans l'équation $\frac{\delta P}{P} - \frac{2\,\delta S}{S} = o$

on aura celle-ci

$$\frac{\Psi - \Pi}{B\,B} + \frac{1}{B}\int\frac{t\,\alpha\,X'\,\delta\,z\,d\,x}{X} - \frac{4\,\pi}{S}\int z\,\delta\,z\,d\,x = o$$

ou bien, à cauſe que les quantités B & S ſont conſtantes par rapport à x, puiſqu' elles expriment des intégrales déterminées où x eſt ſuppoſée $= a$,

$$\frac{\Psi - \Pi}{B\;P} + \int\left(\frac{t\,\alpha\,X'}{B\,X} - \frac{4\,\pi\,z}{S}\right)\delta\,z\,d\,x = o$$

On aura donc d'abord pour tous les points de la courbe l' équation indéfinie $\frac{t\,\alpha\,X'}{B\;X} - \frac{4\,\pi\,z}{S} = o$

c' eſt-à-dire $\frac{t\,\alpha\,X'}{z^2\,X} = \frac{4\,\pi\,B}{S}$;

enſuite on aura l' équation déterminée $N = M$ laquelle ne ſe rapporte qu' aux points extrêmes de la courbe où $x = o$ & $x = a$.

30. Ainſi pour avoir l'équation de la courbe cherchée il n' y aura qu' à éliminer les deux indéterminées t & α, à l' aide de ces trois équations $\frac{t\,\alpha\,X'}{z\,X} = \frac{4\,\pi\,B}{S}$,

$$\left(P - \frac{3\,X}{t^4}\right)\alpha + \frac{d^2\,(X\,\alpha)}{d\,x^2} = \frac{H}{t^3},$$

$$P\,t + X\left(\frac{d^2\,t}{d\,x^2} - \frac{1}{t^3}\right) = o$$

& comme X eſt ſuppoſée une fonction connue de z, on aura une équation finale, entre les ordonnées z, & les abſciſſes x.

Il eſt bon de remarquer que ſi on fait $\alpha = H\,r$, la conſtante H diſparoîtra de la ſeconde équation, & que la première étant diviſée par H deviendra $\frac{r\,t\,X'}{z^2\,X} = \frac{4\,\pi\,B}{H\,S}$, de ſorte que, comme H eſt une conſtante arbitraire, la quantité $\frac{4\,\pi\,B}{H\,S}$ aura une valeur conſtante quelconque indépendante de B, & de S.

De cette manière on aura donc, en prenant une conſtante arbitraire C, les trois équations ſuivantes

$$\frac{r t X'}{z X} = C,$$

$$\left(P - \frac{3X}{t^4}\right) r + \frac{d.^2 (X r)}{d x^2} - \frac{1}{t^3} = o,$$

$$P t + X \left(\frac{d^2 t}{d x^2} - \frac{1}{t^3}\right) = o,$$ qui renferment la ſolution du problême propoſé, pris dans toute ſa généralité.

31. Si on chaſſe r & t, il viendra une équation en z & x du quatrième ordre, qui ſera peut-être bien difficile à intégrer; mais je remarque que $z =$ à une conſtante ſera ſurément une intégrale particulière de cette équation; car ſuppoſant z conſtante, X & X' qui ſont des fonctions de z, ſeront auſſi conſtantes, de ſorte que ſi on ſuppoſe auſſi r & t conſtantes en même tems, les équations ci-deſſus deviendront

$$\frac{r t X'}{z X} = C, \quad \left(P - \frac{3X}{t^4}\right) r - \frac{1}{t^3} = o, \quad P t - \frac{X}{t^3} = o;$$

dont les deux dernières donneront d'abord

$$t^4 = \sqrt[4]{\frac{X}{P}}, \quad r = \frac{t}{P t^4 - 3X} = -\frac{1}{2\sqrt[4]{P X^3}};$$ enſuite la première donnera $-\frac{X'}{2 z X \sqrt{P X}} = C$; d'où l'on tirera la valeur de z laquelle, à cauſe de la conſtante arbitraire C, pourra être une conſtante quelconque.

32. Cette valeur de z donne évidemment un cylindre pour la figure de la colonne; mais, comme ce n'eſt qu'une valeur particulière, elle ne peut être cenſée reſoudre le problême que dans certaines circonſtances. En effet, comme l'équation en z doit être du quatrième ordre, ainſi que nous l'avons remarqué ci-deſſus, elle renfermera néceſſairement, étant intégrée, quatre conſtantes arbitraires, enſorte qu'on pourra faire paſſer la courbe par quatre

points

points quelconques donnés, ou par deux points, & par deux tengentes, ou &c.: Si on veut que la courbe de la colonne qui doit avoir la plus grande force possible passe par quatre points également éloignés de l'axe; dans ce cas on sera assuré qu'il n'y aura qu'une ligne droite qui resolve le problême, ensorte que la colonne devra être nécessairement cylindrique; la même chose aura lieu, par exemple, si les deux bases de la colonne doivent être égales entr'elles, & que de plus les tengentes de la courbe aux deux extrémités doivent être paralleles à l'axe; & ainsi du reste.

En général, toutes les fois que les quatre conditions données seront telles, qu'elles pourront quadrer avec une ligne droite parallele à l'axe, cette ligne sera surément celle du *maximum*; mais dans tous les autres cas le proplême ne pourra se resoudre que par l'intégration complette de l'équation différentielle en z & x.

33. Si on veut que la colonne soit à peu-près cylindrique, ce qui est le cas le plus ordinaire, on pourra resoudre le problême d'une manière approchée que voici.

Puisque lorsque z est constante on a aussi r, & t constantes, il est visible que si z varie peu, r, & t varieront peu aussi.

Supposons donc

$z = Z(1 + \zeta)$, $r = R(1 + \rho)$, $t = T(1 + \theta)$, Z, R, T étant des constantes finies, & ζ, ρ, θ des variables très petites; & substituant ces valeurs on pourra negliger les produits de deux, ou de plusieurs dimensions de ζ, ρ, θ, ensorte que l'on aura des équations où les variables ne se trouveront que sous une forme linéaire, & qui seront par conséquent intégrables par les méthodes connues.

Mais avant de faire ces substitutions on remarquera, que comme X est supposée une fonction donnée de z,

si on fait $\frac{dX}{dz} = X'$, & $\frac{dX'}{dz} = X''$, les quantités X & X deviendront à très-peu près $X + X'Z\zeta$, $X' + X''Z\zeta$, c'est-à-dire $X\left(1 + \frac{X'Z\zeta}{X}\right) X'\left(1 + \frac{X''Z\zeta}{X'}\right)$ en supposant que l'on ait mis Z à la place de z dans X, X', X'', ensorte que ces quantités seront maintenant constantes.

De cette manière les équations de l'art. 30 deviendront

$$\frac{RTX'}{ZX}\left(1 + \rho + \theta + \zeta\left(\frac{X''Z}{X'} - \frac{X'Z}{X} - 1\right)\right) = C,$$

$$R\left(P - \frac{3X}{T^4}\left(1 + \frac{X'Z}{X}\zeta - 4\theta\right) + P\rho\right) + XR\left(\frac{X'Z}{X}\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\rho}{dx^2}\right) - \frac{1}{T^3}\left(1 - 3\theta\right) = o;$$

$$PT(1+\theta) + XT\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{X}{T^3}\left(1 + \frac{X'Z}{Z}\zeta - 3\theta\right) = o.$$

Or si les quantités ρ, θ & ζ étoient nulles on auroit

$$\frac{RTX'}{ZX} = C,\ R\left(P - \frac{3X}{T^4}\right) - \frac{1}{T^3} = o,\ PT - \frac{X}{T^3} = o;$$

d'où l'on tire $X = PT^4$, $R = -\frac{1}{2PT^3}$; donc supposant (ce qui est permis) que ces équations aient lieu, les équations précédentes deviendront

$$\rho + \theta + \left(\frac{ZX''}{X'} - \frac{ZX'}{X} - 1\right)\zeta = o,$$

$$-3\left(\frac{ZX'}{X}\zeta - 4\theta\right) + \rho + T^4\left(\frac{ZX'}{X}\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\rho}{dx^2}\right) - \sigma\theta = o,$$

$$\theta + T^4\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{ZX'}{X}\zeta + 3\theta = o,$$

ou bien, en faisant pour plus de simplicité $\frac{ZX'}{X} = M$, $1 + \frac{ZX'}{X} - \frac{ZX''}{X'} = N$, on aura ces trois équations-ci :

$$\rho + \theta - N\zeta = o$$

$$M\left(T^4\frac{d^2\zeta}{dx^2} - 3\,\zeta\right) + T^4\,\frac{d^2\,\rho}{dx^2} + \rho + \sigma\,\theta = o,$$

$$T^4\frac{d^2\theta}{dx^2} + 4\,\theta - M\,\zeta = o.$$

de l' intégration desquelles dépend maintenant la solution du problême.

34. Pour intégrer ces équations je suppose

$$\zeta = \alpha\ \text{sin.}\left(\varepsilon + x\,\frac{\surd\omega}{T^2}\right)$$

$$\theta = \beta\ \text{sin.}\left(\varepsilon + x\,\frac{\surd\omega}{T^2}\right)$$

$$\rho = \gamma\ \text{sin.}\left(\varepsilon + x\,\frac{\surd\omega}{T^2}\right)$$

α, β, γ, ε & ω étant des constantes indéterminées; je substitue ces valeurs, & je divise ensuite tous les termes par $\text{sin.}\left(\varepsilon + x\frac{\surd\omega}{T^2}\right)$; j' ai les trois équations suivantes

$$\gamma + \beta - N\,\alpha = o,$$

$$-\,M\,\alpha\,(\omega + 3) - \gamma\,(\omega - 1) + \sigma\,\beta = o,$$

$$-\,\beta\,(\omega - 4) - M\,\alpha = o;$$

la dernière donne $\alpha = -\frac{\beta\,(\omega - 4)}{M}$, ce qui étant substitué dans les deux premières, on aura

$$\gamma + \beta\left(1 + \frac{N\,(\omega - 4)}{M}\right) = o$$

$$\beta\,(\sigma + (\omega + 3)\,(\omega - 4)) - \gamma\,(\omega - 1) = o;$$

la première donnera sur le champ

$$\gamma = -\,\beta\left(1 + \frac{N\,(\omega - 4)}{M}\right)$$

& substituant ensuite cette valeur dans l' autre équation, on aura après avoir divisé tous les termes par β,

$$\sigma + (\omega + 3)\,(\omega - 4) + (\omega - 1)\left(1 + \frac{N\,(\omega - 4)}{M}\right) = o$$

c' eſt-à-dire en réduiſant

$$(M + N)\,\omega^2 - 5\,N\omega + 4\,N - 7\,M = 0$$

équation d'où l'on tirera deux valeurs de ω, leſquelles ſeront toujours néceſſairement réelles, à cauſe que

$$(5\,N)^2 - 4\,(M + N)\,(4\,N - 7\,M) =$$
$$9\,N^2 + 12\,MN + 28\,M^2 = (3\,N + 2\,M)^2 + 24\,M^2;$$

& ces valeurs ſeront

$$\omega = \frac{5\,N + \surd((3\,N + 2\,M)^2 + 24\,M^2)}{2\,(M + N)}.$$

Comme la quantité β a diſparu de l'équation en ω, il s'enſuit qu'elle reſte indéterminée, de ſorte qu'on pourra la prendre à volonté; mais on peut, ſi l'on veut, prendre α à volonté au lieu de β, ce qui ſera plus commode, parceque c'eſt proprement la quantité ζ que l'on cherche; alors les quantités β, & γ devront être déterminées ainſi $\beta = -\frac{M\,\alpha}{\omega - 4}$, $\gamma = \left(N + \frac{M}{\omega - 4}\right)\alpha$;

Quant à la conſtante ε, comme elle a auſſi diſparu des équations, elle ſera pareillement arbitraire.

Or puiſque la quantité ω a deux valeurs, ſi on déſigne ces valeurs par ω & $\acute{\omega}$, & qu'on prenne deux autres conſtantes arbitraires $\acute{\alpha}$ & $\acute{\varepsilon}$, on aura pour la valeur complette de ζ l'expreſſion

$$\zeta = \alpha\ \mathit{ſin.}\left(\varepsilon + x\,\frac{\surd\omega}{T^2}\right) + \acute{\alpha}\ \mathit{ſin.}\left(\acute{\varepsilon} + x\,\frac{\surd\acute{\omega}}{T^2}\right),$$

& les valeurs correſpondantes de θ & ρ ſeront

$$\theta = \beta\ \mathit{ſin.}\left(\varepsilon + x\,\frac{\surd\omega}{T^2}\right) + \beta'\ \mathit{ſin.}\left(\acute{\varepsilon} + x\,\frac{\surd\acute{\omega}}{T^2}\right),$$

$$\rho = \gamma\ \mathit{ſin.}\left(\varepsilon + x\,\frac{\surd\omega}{T^2}\right) + \gamma'\ \mathit{ſin.}\left(\acute{\varepsilon} + x\,\frac{\surd\acute{\omega}}{T^2}\right);$$

β' & γ' étant les valeurs de β & γ qui réſultent en mettant $\acute{\alpha}$ & ω' à la place de α & ω.

35. Je remarque maintenant que lorſque z eſt égal à une conſtante, ce qui eſt le cas des colonnes cylindriques,

on a (art. 11.) $P = \frac{\pi^2 K}{a^2}$, a étant la hauteur de la colonne, π étant l' angle de 180.°; ainsi dans notre cas où $z = Z + Z\zeta$, on aura, aux quantités très-petites près, $P = \frac{\pi^2 X}{a^2}$, puisque X étant constante est la même quantité qu' on avoit désignée par K (art. 12.); or on a (art. 33.) $X = P T^4$; donc $X = \frac{\pi^2 X T^4}{a^2}$, d' où $T^4 = \frac{a^2}{\pi^2}$, & par conséquent $T^2 = \frac{a}{\pi}$; donc si on substitue cette valeur on aura

$$\zeta = \alpha \, \text{fin.} \left(\varepsilon + \frac{x \pi \sqrt{\omega}}{a}\right) + \alpha' \, \text{fin.} \left(\varepsilon' + \frac{x \pi \sqrt{\omega'}}{a}\right);$$

α, α', ε, ε' étant quatre constantes arbitraires qu' on pourra déterminer, ensorte que la courbe cherchée, dont les abscisses sont x & les ordonnées sont $z = Z(1 + \zeta)$ passe par quatre points donnés, ou par deux points & deux tangentes, ou &c. comme on l' a dit plus haut (art. 32.)

A l' égard des valeurs de ω & ω' elles ne dépendront que de la nature de la fonction X de Z; car en faisant $\frac{Z\,dX}{X\,dZ} = M$, $\frac{Z\,d^2 X}{dX\,dZ} = M'$, on aura

$$\omega = \frac{5(1 + M - M') + \sqrt{((3 + 5M - 3M')^2 + 24 M^2)}}{2(1 + 2M - M')},$$

$$\omega' = \frac{5(1 + M - M') - \sqrt{((3 + 5M - 3M')^2 + 24 M^2)}}{2(1 + 2M - M')}.$$

S' il arrive que ω soit négatif, alors le radical $\sqrt{\omega}$ deviendra imaginaire; & le terme $\alpha \, \text{fin.} \left(\varepsilon + \frac{x \pi \sqrt{\omega}}{a}\right)$ deviendra (en y mettant $\varepsilon\sqrt{-1}$ à la place de ε & $2\alpha\sqrt{-1}$ à celle de α) de cette forme

$$\alpha \left(e^{\varepsilon + \frac{x \pi \sqrt{-\omega}}{a}} - e^{-\varepsilon - \frac{x \pi \sqrt{-\omega}}{a}} \right)$$

il en ſera de même du terme $\acute{\alpha}$ *ſin.* $\left(\acute{\varepsilon} + \frac{x \pi \sqrt{\acute{\omega}}}{a} \right)$ ſi $\acute{\omega}$ devient négatif.

Si X eſt ſuppoſé proportionel à une puiſſance quelconque de ζ, ou Z, enſorte que $X = K Z^n$, on aura $M = n$, $M = n - 1$; donc

$$\omega = \frac{5 + \sqrt{(9 + \sigma n + 7 n^2)}}{2 + n},$$

$$\acute{\omega} = \frac{5 - \sqrt{(9 + \sigma n + 7 n^2)}}{2 + n};$$

Et ſuppoſant $n = 4$, comme on l'a fait plus haut, on aura $\omega = 2$, $\acute{\omega} = -\frac{1}{3}$; par conſéquent l'équation de la courbe contiendra dans ce cas des ſinus & des exponentielles.

36. Pour ce qui regarde les conſtantes α, $\acute{\alpha}$, ε, $\acute{\varepsilon}$, le moyen le plus ſimple pour les déterminer eſt de ſuppoſer que les valeurs de ζ, & $\frac{d\zeta}{dx}$ ſoient données aux deux extrémités de la colonne où $x = o$, & où $x = a$. Pour cela ſuppoſons donc que lorſque $x = o$ on ait $\zeta = p$, $\frac{d\zeta}{dx} = q$, & que lorſque $x = a$ on ait $\zeta = p'$ $\frac{d\zeta}{dx} = q'$, enſorte que $Z(1 + p)$ $Z(1 + p')$ ſoient les rayons des deux baſes de la colonne, l'inférieure & la ſupérieure, & que $Z q$, $Z q'$ ſoient les tangentes de l'inclination du profil de la colonne avec l'axe, à l'extrémité inférieure & à l'extrémité ſupérieure; on aura (art. préc.)

$$p = \alpha \, \text{ſin.} \, \varepsilon + \acute{\alpha} \, \text{ſin.} \, \acute{\varepsilon},$$

$$q = \frac{\pi \sqrt{\omega}}{a} (\alpha \cos. \varepsilon + \acute{\alpha} \cos. \acute{\varepsilon}),$$

$$p' = \alpha \, \text{ſin.} \, (\varepsilon + \pi \sqrt{\omega}) + \acute{\alpha} \, \text{ſin.} \, (\acute{\varepsilon} + \pi \sqrt{\acute{\omega}}),$$

$$q' = \frac{\pi \sqrt{\omega}}{a} (\alpha \cos. (\varepsilon + \pi \sqrt{\omega}) + \acute{\alpha} \cos. (\acute{\varepsilon} + \pi \sqrt{\acute{\omega}}));$$

d'où l'on pourra tirer les valeurs de α, α', ε, ε'; en effet les deux premières donneront celles-ci

$$p\ cos.\ \pi\sqrt{\omega'} + \frac{a\,q}{\pi\sqrt{\omega'}}\ \mathit{sin}.\ \pi\sqrt{\omega'} =$$

$$\alpha\ \mathit{sin}.\ (\varepsilon + \pi\sqrt{\omega'}) + \alpha'\ \mathit{sin}.\ (\varepsilon' + \pi\sqrt{\omega'}),$$

$$-\,p\ \mathit{sin}.\ \pi\sqrt{\omega'} + \frac{a\,q}{\pi\sqrt{\omega'}}\ cos.\ \pi\sqrt{\omega'} =$$

$$\alpha\ cos.\ (\varepsilon + \pi\sqrt{\omega'}) + \alpha'\ cos.\ (\varepsilon' + \pi\sqrt{\omega'}),$$

lesquelles étant combinées avec les deux dernières donneront

$$2\,\alpha\ cos.\left(\varepsilon + \pi\frac{\sqrt{\omega}+\sqrt{\omega'}}{2}\right) \times \mathit{sin}.\left(\pi\frac{\sqrt{\omega}-\sqrt{\omega'}}{2}\right)$$

$$= p' - p\ cos.\ \pi\sqrt{\omega'} - \frac{a\,q}{\pi\sqrt{\omega'}}\ \mathit{sin}.\ \pi\sqrt{\omega'},$$

$$-\,2\,\alpha\ \mathit{sin}.\left(\varepsilon + \pi\frac{\sqrt{\omega}+\sqrt{\omega'}}{2}\right) \times \mathit{sin}.\left(\pi\frac{\sqrt{\omega}-\sqrt{\omega'}}{2}\right)$$

$$= \frac{a\,q'}{\pi\sqrt{\omega'}} + p\ \mathit{sin}.\ \pi\sqrt{\omega'} - \frac{a\,q}{\pi\sqrt{\omega'}}\ cos.\ \pi\sqrt{\omega'},$$

d'où en faisant, pour abréger,

$$P = p\ \mathit{sin}.\ \pi\sqrt{\omega'} + \frac{a\,q}{\pi\sqrt{\omega'}}\ cos.\ \pi\sqrt{\omega'} + \frac{a\,q'}{\pi\sqrt{\omega'}};$$

$$Q = p\ cos.\ \pi\sqrt{\omega'} + \frac{a\,q}{\pi\sqrt{\omega'}}\ \mathit{sin}.\ \pi\sqrt{\omega'} - p',$$

on tire

$$tang.\left(\varepsilon = \pi\frac{\sqrt{\omega}+\sqrt{\omega'}}{2}\right) = \frac{P}{Q},$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{(P^2+Q^2)}}{2\,\mathit{sin}.\left(\pi\frac{\sqrt{\omega}-\sqrt{\omega'}}{2}\right)},$$

& de même en faisant

$$P' = p'\ \mathit{sin}.\ \pi\sqrt{\omega} + \frac{a\,q'}{\pi\sqrt{\omega}}\ cos.\ \pi\sqrt{\omega} + \frac{a\,q}{\pi\sqrt{\omega}};$$

$$Q' = p'\ cos.\ \pi\sqrt{\omega} + \frac{a\,q'}{\pi\sqrt{\omega}}\ \mathit{sin}.\ \pi\sqrt{\omega} - p,$$

on aura $tang.\left(\acute{\varepsilon} + \pi\,\frac{\sqrt{\omega} + \sqrt{\acute{\omega}}}{2}\right) = \frac{P'}{Q'}$,

$$\acute{\alpha} = \frac{\sqrt{(P'^2 + Q'^2)}}{2\,\mathit{fin.}\left(\pi\,\frac{\sqrt{\acute{\omega}} - \sqrt{\omega}}{2}\right)}.$$

37. Ainſi les conſtantes α, ε, $\acute{\alpha}$, $\acute{\varepsilon}$ auront des valeurs déterminées ſi les quantités p, q, p', q' ſont toutes données, de ſorte qu' il ne reſtera plus rien d' indéterminé dans l' équation de la courbe cherchée ; mais ſi quelques unes de ces dernières quantités ne ſont pas données, alors quelques unes des conſtantes α, ε, $\acute{\alpha}$, $\acute{\varepsilon}$ reſteront indéterminées, & ce ſera une nouvelle queſtion de *maximis* & *minimis* de déterminer ces conſtantes, enſorte que la force de la colonne ſoit la plus grande qu'il eſt poſſible. Or l' équation de la courbe étant donnée il eſt clair qu'il n' y aura qu' à chercher l' expreſſion de la force, & la rendre enſuite un *maximum*, en ſuppoſant que les conſtantes indéterminées ſoient variables, ainſi que nous l' avons fait plus haut, lorſque nous avons pris une ſection conique pour la courbe de la colonne ; mais la méthode que nous avons employé pour reſoudre le problême en général offre un moyen plus ſimple de parvenir au même but.

38. Pour cela il n' y a qu' à ſe rappeller que l' équation, qui renfermoit les conditions du *maximum*, contenoit deux parties, l' une affectée du ſigne $\int$, qui a ſervi à déterminer en général l' équation de la courbe, l' autre hors du ſigne $\int$, qui ne ſe rapportoit qu' aux deux points extrêmes de la courbe, & dont nous n'avons juſqu' à préſent fait aucun uſage.

Cette dernière partie de l' équation dont il s'agit (art. 29.) eſt $\frac{\Psi - \Pi}{B\ P}$, où Π eſt la valeur de la quantité $\frac{X\alpha d\delta t}{d\,x} - \frac{d.\,(X\alpha)}{dx}\delta t$ pour le premier point où $x = o$, & Ψ la valeur de la même quantité pour le dernier point où $x = a$; ainſi

comme

comme on a égalé ſéparement à zéro la première partie affectée du ſigne $\int$, il faut pareillement égaler à zéro la partie algébrique $\frac{\Psi - \Pi}{B P}$, ce qui donnera l'équation déterminée $\Psi - \Pi = o$. Pour faire uſage de cette équation on remarquera que les variations δt & $\frac{d \delta t}{d x}$ ou bien $\frac{\delta d t}{d x}$, qu' elle contient, ne regardent que les valeurs extrêmes de t, & $\frac{dt}{dx}$, leſquelles dépendent uniquement des quatre conſtantes arbitraires que l' expreſſion générale de t doit renfermer, & qui ſont les mêmes qui entrent dans l' expreſſion de ζ; d' où il s' enſuit, que pour avoir les valeurs en queſtion de δt & de $\delta \frac{dt}{dx}$ il faudra faire varier ces mêmes conſtantes dans les expreſſions de t & de $\frac{dt}{dx}$, ou ſeulement celles, d' entr' elles, qui ſeront demeurées indéterminées; l'on aura par ce moyen les conditions néceſſaires pour la détermination de toutes les conſtantes indéterminées.

39. Pour appliquer ceci au cas de l'art. 33., on ſubſtituera d'abord dans l'expreſſion $X \alpha \delta \frac{dt}{dx} - \frac{dX\alpha}{dx} \delta t$, $Hr = HR(1 + p)$ à la place de α, $X(1 + M\zeta)$ à la place de X, & $T(1 + \theta)$ à la place de θ, & négligeant les termes, où les quantités très-petites ζ, ρ, θ, leſquelles formeroient enſemble deux ou pluſieurs dimenſions, on aura celle-ci: $HXRT\, \delta. \frac{d\theta}{dx}$, où $HXRT$ eſt une quantité conſtante.

Or l' expreſſion générale de θ eſt (art. 34., & 35.), en y ſubſtituant les valeurs de β, β' & T^2, celle-ci:

$$\theta = M \left\{ \frac{\alpha \, \textit{fin.} \left(\varepsilon + \frac{x \pi \sqrt{\omega}}{a}\right)}{4 - \omega} + \frac{\acute{\alpha} \, \textit{fin.} \left(\textit{fin.} \acute{\varepsilon} + \frac{x \pi \sqrt{\acute{\omega}}}{a}\right)}{4 - \acute{\omega}} \right\}$$

d' où l' on tire

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M\pi}{a} \left\{ \frac{\alpha \sqrt{\omega} \, cos. \left(\varepsilon + \frac{x\pi\sqrt{\omega}}{a}\right)}{4 - \omega} + \frac{\acute{\alpha} \sqrt{\acute{\omega}} cos. \left(\acute{\varepsilon} + \frac{x\pi\sqrt{\acute{\omega}}}{a}\right)}{4 - \acute{\omega}} \right\}$$

Donc 1.° faisant $x = o$, on aura

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M\pi}{a} \left(\frac{\alpha \sqrt{\omega} cos. \varepsilon}{4 - \omega} + \frac{\acute{\alpha} \sqrt{\acute{\omega}} \, cos. \acute{\varepsilon}}{4 - \acute{\omega}} \right),$$

& différentiant par δ en faisant varier à la fois α, ε, $\acute{\alpha}$, $\acute{\varepsilon}$, on aura pour le premier point de la courbe

$$\delta . \frac{dt}{dx} = \frac{M\pi}{a} \times \frac{\sqrt{\omega}}{4 - \omega} \left(cos. \, \varepsilon \, \delta \, \alpha - \alpha . \textit{fin.} \, \varepsilon \, \delta \, \varepsilon \right)$$

$$+ \frac{M\pi}{a} \times \frac{\sqrt{\acute{\omega}}}{4 - \acute{\omega}} \left(cos. \, \acute{\varepsilon} \, \delta \, \alpha' - \alpha' \, \textit{fin.} \, \acute{\varepsilon} \, \delta \, \acute{\varepsilon} \right),$$

cette quantité multipliée par $H X R T$ sera la valeur de Π.

2.° Faisant $x = a$, on aura

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M\pi}{a} \left(\frac{\alpha \sqrt{\omega} cos. (\varepsilon + \pi \sqrt{\omega})}{4 - \omega} + \frac{\alpha' \sqrt{\acute{\omega}} \, cos. \, (\acute{\varepsilon} + \pi \sqrt{\acute{\omega}})}{4 - \acute{\omega}} \right),$$

donc différentiant par δ, en faisant varier également α, ε, $\acute{\alpha}$, $\acute{\varepsilon}$, on aura pour le dernier point de la courbe

$$\delta . \frac{d\theta}{dx} = \frac{M\pi}{a} \times \frac{\sqrt{\omega}}{4 - \omega} \left(cos. \, (\varepsilon + \pi \sqrt{\omega}) \, \delta \, \alpha - \alpha \, \textit{fin.} \, (\varepsilon + \pi \sqrt{\omega}) \, \delta \varepsilon \right)$$

$$+ \frac{M\pi}{a} \times \frac{\sqrt{\acute{\omega}}}{4 - \acute{\omega}} \left(cos. \, (\acute{\varepsilon} + \pi \sqrt{\acute{\omega}}) \, \delta \, \acute{\alpha} - \acute{\alpha} \, \textit{fin.} \, (\acute{\varepsilon} + \pi \sqrt{\acute{\omega}}) \, \delta \acute{\varepsilon} \right),$$

& cette quantité multipliée de même par $H X R T$ sera la valeur de Ψ.

40. Ainsi l' équation $\Psi - \Pi = o$ donnera en ordonnant les termes

$$\frac{\sqrt{\omega}}{4 - \omega} \left(cos. \, (\varepsilon + \pi \sqrt{\omega}) - cos. \, \varepsilon \right) \delta \, \alpha$$

$$- \frac{\sqrt{\omega}}{4 - \omega} \left(\textit{fin.} \, (\varepsilon + \pi \sqrt{\omega}) - \textit{fin.} \, \varepsilon \right) \alpha \, \delta \, \varepsilon$$

$$+ \frac{\sqrt{\omega'}}{4\ \omega'} (cos.\ (\varepsilon' + \pi \sqrt{\omega'}) - cos.\ \varepsilon')\ \delta\alpha'$$

$$- \frac{\sqrt{\omega'}}{4 - \omega'} (\mathit{fin.}\ (\varepsilon' + \pi \sqrt{\omega'}) - \mathit{fin.}\ \varepsilon')\ \alpha'\delta\varepsilon' = o.$$

d' où l' on déduira les conclufions fuivantes.

1.° Si les valeurs des quatre conftantes α, α', ε, ε' font données comme dans le cas de l' art. 36., ou, en général, lorfque la courbe doit fatisfaire à quatre conditions données, les différences $\delta\alpha$, $\delta\alpha'$, $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$ feront nulles d' elles mêmes, & l' équation, dont il s' agit, fe trouvera identique.

2.° S' il n' y avoit que les quantités α, & α' de données, alors $\delta\alpha$, & $\delta\alpha'$ feroient nulles, & il faudroit faire évanouir féparement les termes affectés des différences indéterminées $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, ce qui donneroit ces deux équations

$$\mathit{fin.}\ (\varepsilon + \pi \sqrt{\omega}) - \mathit{fin.}\ \varepsilon = o$$

$$\mathit{fin.}\ (\varepsilon' + \pi \sqrt{\omega'})\ \mathit{fin.}\ \varepsilon' = o,$$

lefquelles ferviroient à déterminer les angles ε, & ε'; on auroit donc dans ce cas

$$tang.\ \varepsilon = \frac{\mathit{fin.}\ \pi \sqrt{\omega}}{1 - cos.\ \pi \sqrt{\omega}} = cot.\ \frac{\pi \sqrt{\omega}}{2},$$

$$tang.\ \varepsilon' = \frac{\mathit{fin.}\ \pi \sqrt{\omega'}}{1 - cos.\ \pi \sqrt{\omega'}} = cot.\ \frac{\pi \sqrt{\omega'}}{2},$$

d' où $\varepsilon = 90.^\circ - \frac{\pi \sqrt{\omega}}{2}$, $\varepsilon' = 90 - \frac{\pi \sqrt{\omega}}{2}$.

Si c' étoient les quantités ε & ε' qui fuffent données, alors les termes affectés de $\delta\varepsilon$, & $\delta\varepsilon'$ évanouiroient, & il faudroit enfuite faire difparoître ceux qui font affectés de $\delta\alpha$, & $\delta\alpha$; mais comme ces termes ne renferment point les quantités indéterminées α, α', mais feulement les données ε, ε', il s' enfuit qu' il eft impoffible de les faire évanouir en général, ce qui eft une marque qu' il

n'y a point de *maximum* par rapport aux conſtantes α, α' en particulier.

3.° S'il n'y avoit de donné que les deux baſes de la colonne, alors les valeurs de p, & p' ſeroient données (art. 36.); on prendroit donc les deux équations de cet article

$$p = \alpha\ \text{ſin.}\ \varepsilon + \alpha'\ \text{ſin.}\ \varepsilon',$$

$$p' = \alpha\ \text{ſin.}\ (\varepsilon + \pi \sqrt{\omega}) + \alpha'\ \text{ſia.}\ (\varepsilon' + \pi \sqrt{\omega'}),$$

& les différentiant par δ, en faiſant p, p' conſtantes, & α, α', ε, ε' variables on auroit ces deux-ci :

$$\text{ſin.}\ \varepsilon\, \delta \alpha + \alpha \cos.\ \varepsilon\, \delta \varepsilon + \text{ſin.}\ \varepsilon'\, \delta \alpha' + \alpha' \cos.\ \varepsilon'\, \delta \varepsilon' = o,$$

$$\text{ſin.}\ (\varepsilon + \pi \sqrt{\omega})\, \delta \alpha + \alpha \cos.\ (\varepsilon + \pi \sqrt{\omega})\, \delta \varepsilon + \text{ſin.}\ (\varepsilon' + \pi \sqrt{\omega'})\, \delta \alpha' + \alpha' \cos.\ (\varepsilon' + \pi \sqrt{\alpha'})\, \delta \varepsilon' = o,$$

à l'aide deſquelles on pourra déterminer deux des quatre différentielles indéterminées $\delta \alpha$, $\delta \alpha'$, $\delta \varepsilon$, $\delta \varepsilon'$ par les deux autres. Cherchons $\delta \alpha$, & $\delta \varepsilon$; pour cela on retranchera les équations précédentes l'une de l'autre après avoir multiplié 1.° la première par $\cos.\ (\varepsilon' + \pi \sqrt{\omega})$, & la ſeconde par $\cos.\ \varepsilon$, 2.° la première par $\text{ſin.}\ (\varepsilon + \pi \sqrt{\omega})$ & la ſeconde par $\text{ſin.}\ \varepsilon$; on aura

$$d \alpha = \frac{\text{ſin.}\ \varepsilon' \times \cos.\ (\varepsilon + \pi \sqrt{\omega}) - \text{ſin.}\ (\varepsilon' + \pi \sqrt{\omega'}) \times \cos.\ \varepsilon}{\text{ſin.}\ \pi \sqrt{\omega}}\ \delta \alpha'$$

$$+ \frac{\cos.\ \varepsilon' \times \cos.\ (\varepsilon + \pi \sqrt{\omega}) - \cos.\ (\varepsilon' + \pi \sqrt{\omega}) \times \cos.\ \varepsilon}{\text{ſin.}\ \pi \sqrt{\omega}}\ \alpha' \delta \varepsilon',$$

$$\alpha \delta \varepsilon = - \frac{\text{ſin.}\ \varepsilon' \times \text{ſin.}\ (\varepsilon + \pi \sqrt{\omega}) - \text{ſin.}\ (\varepsilon' + \pi \sqrt{\omega'})\ \text{ſin.}\ \varepsilon}{\text{ſin.}\ \pi \sqrt{\omega}}\ \delta \alpha$$

$$- \frac{\cos.\ \varepsilon' \times \text{ſin.}\ (\varepsilon + \pi \sqrt{\omega}) - \cos.\ (\varepsilon' + \pi \sqrt{\omega'})\ \text{ſin.}\ \varepsilon}{\text{ſin.}\ \pi \sqrt{\omega}}\ \alpha' \delta \varepsilon';$$

On ſubſtituera donc ces valeurs dans l'équation générale, & on fera enſuite égaux à zéro, ſéparement, les deux membres affectées de $\delta \alpha$, & $\delta \varepsilon'$; ce qui donnera ces deux équations.

$$\frac{\sqrt{\omega'}}{4-\omega'}\ (cos.\ (\varepsilon' + \pi\sqrt{\omega'}) - cos.\ \varepsilon') +$$
$$\frac{\sqrt{\omega}}{4-\omega}\ tang.\ \frac{\pi\sqrt{\omega}}{2}\ (fin.\ (\varepsilon' + \pi\sqrt{\omega'}) + fin.\ \varepsilon') = o,$$
$$\frac{\alpha'\sqrt{\omega'}}{4-\omega'}\ (fin.\ (\varepsilon' + \pi\sqrt{\omega'}) - fin.\ \varepsilon') +$$
$$\frac{\alpha'\sqrt{\omega}}{4-\omega}\ tang.\ \frac{\pi\sqrt{\omega}}{2}\ (cos.\ (\varepsilon' + \pi\sqrt{\omega'} + cos.\ \varepsilon') = o,$$

qui ferviront à déterminer les quantités α' & ε'.

En effet, la première ne contenant que la quantité ε', donnera la valeur de cette quantité; enfuite il faudra déterminer α' par la feconde équation, laquelle donnera $\alpha' = o$; ainfi la valeur de ζ fe réduira à celle-ci

$$\zeta = \alpha\ fin.\ \left(\varepsilon + \frac{x\pi\sqrt{\omega}}{a}\right)$$

où les conftantes α, & ε, devront fe déterminer par les deux conditions

$p = \alpha\ fin.\ \varepsilon$, $p' = \alpha\ fin.\ (\varepsilon + \pi\sqrt{\omega})$,

d'où l'on tire

$$tang.\ \varepsilon = \frac{p\ fin.\ \pi\sqrt{\omega}}{p' - p\ cos.\ \pi\sqrt{\omega}},$$
$$\alpha = \frac{\sqrt{(p'^2 - 2\,pp'\ cos.\ \pi\sqrt{\omega} + p^2)}}{fin.\ \pi\sqrt{\omega}},$$

& l'on remarquera que l'on peut prendre indifféremment pour ω l'une quelconque des deux racines de l'équation en ω; de forte que la folution fera double.

4.° Enfin, s'il n'y avoit rien de donné, & qu'on cherchât abfolument, entre toutes les courbes poffibles, celle qui formera une colonne de la plus grande force, relativement à fa hauteur & à fa maffe, comme nous l'avons fuppofé dans nos calculs, il faudroit alors dans l'équation ci-deffus égaler féparement à zéro les membres affectés des différentielles indéterminées $\delta\alpha$, $\delta\varepsilon$, $\delta\alpha'$, $\delta\varepsilon'$; ce qui don-

neroit ces quatre équations

$$cos. (\varepsilon + \pi \sqrt{\omega}) - cos. \varepsilon = o,$$

$$(fin. (\varepsilon + \pi \sqrt{\omega}) - fin. \varepsilon) \alpha = o;$$

$$cos. (\varepsilon' + \pi \sqrt{\omega}) - cos. \varepsilon' = o,$$

$$(fin. (\varepsilon' + \pi \sqrt{\omega'}) - fin. \varepsilon') \alpha' = o;$$

comme la première ne contient que l' angle ε, elle ne pourra ſervir qu' à déterminer cette quantité; enſuite de quoi on ne pourra vérifier la ſeconde qu'en faiſant $\alpha = o$; de même la troiſième donnera la valeur de ε', & la quatrième donnera néceſſairement $\alpha' = o$;

On aura donc dans ce cas $\alpha = o$, & $\alpha' = o$, & par conſéquent $\zeta = o$, & $z = Z (1 + \zeta) = Z$; c' eſt-à-dire z égale à une conſtante, ce qui donne un cylindre pour la figure de la colonne. D' où l' on doit conclure que la figure cylindrique eſt celle qui donne le *maximum maximorum* de la force.

MEMOIRE

Sur l' utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations; dans lequel on examine les avantages de cette méthode par le calcul des probabilités; & où l' on résoud différens problêmes relatifs à cette matière.

PAR M. DE LA GRANGE.

Quand on a plusieurs observations d' un même phénomêne dont les résultats ne sont pas tout à fait d' accord, on est sur que ces observations sont toutes, ou au moins en partie, peu exactes, de quelque source que l' erreur puisse provenir; alors on a coutume de prendre le milieu entre tous les résultats, parceque de cette manière les différentes erreurs se repartissant également dans toutes les observations, l' erreur qui peut se trouver dans le résultat moyen, devient aussi moyenne entre toutes les erreurs. Or quoique tout le monde reconnoisse l' utilité de cette pratique pour diminuer, autant qu' il est possible, l' incertitude qui nait de l' imperfection des instrumens & des erreurs inévitables des observations, j' ai cru, cependant, qu' il seroit bon d' examiner & d' apprécier par le calcul les avantages qu' on peut esperer de retirer d'une semblable méthode; c' est l' objet que je me suis proposé dans ce mémoire. Je commencerai par supposer que les erreurs qui peuvent se glisser dans chaque observation soient données, & qu' on connoisse aussi le nombre des cas qui peuvent donner ces erreurs, c' est-à-dire, la facilité de chaque erreur; je supposerai ensuite que l' on

connoisse seulement les limites entre lesquelles toutes les erreurs possibles doivent être renfermées avec la loi de leur facilité, & je chercherai dans l'une & dans l'autre de ces hypothèses, quelle est la probabilité que l'erreur du résultat moyen soit nulle, ou égale à une quantité donnée, ou seulement comprise entre des limites données. Je fairai voir, en même tems, comment on peut déterminer, *a posteriori*, la loi même de la facilité des erreurs, & quelle est la probabilité que dans cette détermination on ne se trompera pas d'une quantité donnée. D'où je déduirai des règles assés simples pour la correction des instrumens par des vérifications réitérées.

Au reste, je suivrai dans toutes ces recherches la règle ordinaire du calcul des probabilités, suivant laquelle on estime la probabilité d'un événement par le nombre des cas favorables, divisé par le nombre de tous les cas possibles. La difficulté ne consiste que dans l'énumération de ces cas, mais cette énumération demande souvent des calculs assés compliqués, & dont on ne peut venir à bout que par des artifices particuliers; c'est ce qui a lieu sur tout dans la matière que je vais traiter.

Problême I.

1. On suppose que dans chaque observation on peut se tromper d'une unité, tant en plus qu'en moins, mais que le nombre des cas qui peuvent donner un résultat exact est au nombre des cas qui peuvent donner une erreur d'une unité comme $a:2b$; on demande quelle est la probabilité d'avoir un résultat exact en prenant le milieu entre les résultats particuliers d'un nombre n d'observations.

Puisque il y a a cas qui donnent zéro d'erreur, & $2b$ cas qui donnent $+1$, & -1, c'est-à-dire b cas qui donnent

donnent $+1$, & b cas qui donnent -1 d'erreur, il eſt clair par les règles ordinaires des probabilités que la probabilité que l'erreur ſoit nulle dans chaque obſervation particulière ſera exprimée par $\frac{a}{a+2b}$; voyons donc quelle ſera la probabilité que l'erreur ſoit auſſi nulle en prenant le milieu entre n obſervations. Il eſt facile de voir que cette queſtion ſe réduit à celle-ci : „ ayant n dès dont chacun ait a faces marquées d'un zéro, b faces marquées „ d'une unité poſitive, & b faces marquées d'une unité „ négative, enſorte que le nombre total des faces ſoit „ $a+2b$, trouver la probabilité qu'il y a d'amener „ zéro en jettant tous ces dès au hazard. Or on ſait par la théorie des combinaiſons que ſi on élève le trinome $a+b\ (x+x^{-1})$ à la puiſſance n, le coefficient du terme abſolu c'eſt-à-dire ou la puiſſance de x ſera zéro, dénotera le nombre des cas ou des hazards, ou la ſomme des points marqués par tous les dès ſera égale à zéro : donc nommant ce coefficient A, on aura, à cauſe que le nombre de toutes les combinaiſons poſſibles eſt $(a+2b)^n$, on aura, dis je, $\frac{A}{(a+2b)^n}$ pour la probabilité cherchée.

Tout ſe réduit donc à trouver le coefficient A; or c'eſt à quoi on peut parvenir de pluſieurs manières différentes.

1.° Si on développe la puiſſance $(a+b\ (x+x^{-1}))^n$ ſuivant le théorême de nevvton on aura, comme l'on ſait,

$$a^n+n\,a^{n-1}b\,(x+x^{-1})+\frac{n\,(n-1)}{2}\,a^{n-2}\,b^2\,(x+x^{-1})^2+\&c.$$

or il eſt facile de voir que les puiſſances impaires de $x+x^{-1}$ ne renferment aucun terme ſans x, & que dans les puiſſances paires il y a toujours un terme ſans x, qui eſt celui du milieu, dans lequel les expoſans de x, & x^{-1} ſont les mêmes ;

ainſi le terme ſans x de $(x+x^{-1})^2$ ſera 2,

celui de $(x+x^{-1})^4$ ſera $\frac{4.\,3}{1.\,2}$

celui de $(x+x^{-1})^6$ ſera $\frac{6.\,5.\,4}{1.\,2.\,3}$

& ainſi des autres ; donc on aura en général

$$A = a^n + \frac{2}{1}.\frac{n\,(n-1)}{1.\,2}\,a^{n-2}\,b^2 +$$

$$\frac{4.3}{1.2}.\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,a^{n-4}\,b^4 +$$

$$\frac{6.5.4}{1.2.3}.\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,.\,.\,.\,(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}\,a^{n-6}\,b^6 + \&c.$$

c' eſt-à-dire

$$A = a^n + n\,(n-1)\,a^{n-2}\,b^2 + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{2\,.\,2}\,a^{n-4}b^4$$

$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,.\,.\,.\,(n-5)}{2\,.\,3\,.\,2\,.\,3}\,a^{n-6}\,b^6 + \&c.$$

2.° Il eſt viſible que le trinome $a + b\,(x+x^{-1})$ peut ſe décompoſer en ces deux binomes $\alpha + \beta\,x$, $\alpha + \beta\,x^{-1}$; ce qui donne par la comparaiſon des termes $\alpha^2 + \beta^2 = a$, & $\alpha\,\beta = b$; d'où l'on tire $\alpha \pm \beta = \sqrt{a \pm 2\,b}$, & de là

$$\alpha = \frac{\sqrt{(a+2\,b)} + \sqrt{(a-2\,b)}}{2}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{(a+2\,b)} - \sqrt{(a-2\,b)}}{2}$$

Cela poſé on aura donc $(a + b\,(x+x^{-1}))^n$
$= (\alpha + \beta\,x)^n \times (\alpha + \frac{\beta}{x})^n =$

$$\left(\alpha^n + n\ \alpha^{n-1}\,\beta\,x + \frac{n\ (n-1)}{2}\,\alpha^{n-2}\,\beta^2\,x^2 + \&c.\right) \times$$

$$\left(\alpha^n + \frac{n\ \alpha^{n-1}\,\beta}{x} + \frac{n\ (n-1)}{2}\,\frac{\alpha^{n-2}\,\beta^2}{x^2} + \&c.\right)$$

d' où il eſt facile de conclure qu' on aura

$$A = \alpha^{2n} + (n\,\alpha^{n-1}\beta)^2 + \left(\frac{n\,(n-1)\,\alpha^{n-2}\beta^2}{1\,.\,2}\right)^2$$
$$+ \left(\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\alpha^{n-3}\,\beta^3}{1\,.\,2\,.\,3}\right)^2 + \&c.$$

Corollaire I.

2. Soit $a = b$, c' eſt-à-dire qu' il y ait un nombre égal de cas qui donnent o, ou $+ 1$, ou $- 1$ d' erreur ; la probabilité d' avoir un réſultat exact dans chaque obſervation particulière ſera $\frac{a}{a+2b} = \frac{1}{3}$; & celle d' avoir un réſultat exact, en prenant le terme moyen entre les réſulats de n obſervations, ſera ſuivant la première formule, (en diviſant le haut & le bas de la fraction $\frac{A}{(a+2b)^n}$ par a^n)

$$\frac{1 + n\,(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,1\,.\,2} + \frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1\,.\,1\,.\,3\,.\,1\,.\,2\,.\,3} + \&c.}{3^n}$$

Donc en faiſant ſucceſſivement $n = 1, 2, 3$, &c. on aura

n	probab.
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{7}{27}$
4	$\frac{19}{81}$
5	$\frac{51}{243}$
6	$\frac{141}{729}$
&c.	

 On

On voit par cette table que la probabilité que l'erreur ſoit nulle diminue à meſure que l'on prend un plus grand nombre d'obſervations, de ſorte que ſi on vouloit eſtimer l'avantage qu'il peut y avoir à prendre le milieu entre pluſieurs obſervations, par l'excès de la probabilité que l'erreur ſoit nulle dans le réſultat moyen, ſur celle que l'erreur ſoit auſſi nulle dans chaque réſultat particulier, on trouveroit dans le cas dont il s'agit ici que l'avantage ſeroit toujours négatif, c'eſt-à-dire qu'il ſe changeroit en déſavantage, lequel iroit même en augmentant plus il y auroit d'obſervations; d'où il ſemble qu'on pourroit conclure, que dans ce cas il vaudroit mieux s'en tenir à une obſervation unique, que de prendre le milieu entre pluſieurs obſervations; mais il y a une conſidération eſſentielle à faire ſur cette matière, de laquelle il réſulte qu'il eſt toujours plus avantageux dans la pratique de multiplier des obſervations autant que l'on peut, c'eſt ce que nous diſcuterons plus bas.

Corollaire II.

3. Soit maintenant $a = 2\ b$, enſorte que le nombre des cas qui donnent un réſultat exact ſoit égal au nombre de ceux qui peuvent donner une erreur de $+ 1$, ou $- 1$; dans ce cas il vaudra mieux ſe ſervir de la ſeconde formule; car on aura $\alpha = \sqrt{b}$, $\beta = \sqrt{b}$, de ſorte qu'à cauſe de $a + 2\ b = 4\ b$, on aura, en diviſant le haut & le bas de la fraction, $\frac{A}{(a+2b)^n}$ par b^n,

$$\frac{1 + n^2 + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{n(n-1)(n-2)}{2\ .\ 3}\right)^2 + \&c.}{4^n}$$

pour la probabilité que l'erreur ſoit nulle en prenant le milieu entre n obſervations.

Donc faiſant ſucceſſivement $n = 1, 2, 3$ &c. on aura les réſultats ſuivans

n	prob.
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{5}{16}$
4	$\frac{35}{128}$
&c.	

où l' on voit que la probabilité diminue à meſure que n augmente comme dans le cas du corollaire préc.

Corollaire III.

4. Soit $b = 2a$ de manière que le nombre des cas qui peuvent donner une erreur d' une unité tant en plus qu'en moins ſoit double de celui où l' on auroit un réſultat exact, on aura ici pour la probabilité que l' erreur ſoit nulle en prenant le milieu entre n obſervations

$$\frac{1 + 4n(n-1) + \frac{16n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\,.\,2} + \frac{26n(n-1)\ldots\ldots(n-5)}{2\,.\,3\,.\,2\,.\,3} + \&c.}{5^n}$$

Donc faiſant ſucceſſivement $n = 1, 2, 3$, on aura

n	prob.
1	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{9}{25}$
3	$\frac{1}{5}$
4	$\frac{29}{125}$
&c.	

Ainſi pour 2 obſervations l'avantage ſera de $\frac{9}{25} - \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$, pour trois il ſera $\frac{1}{5} - \frac{1}{5} = o$; pour quatre égal à $\frac{29}{125} - \frac{1}{5} = \frac{4}{125}$; &c. d'où il paroit que le plus grand avantage a lieu en prenant le milieu entre deux obſervations ſeulement.

Remarque I.

5. Pour faciliter davantage la ſolution du problême précédent, il eſt bon de chercher la loi que ſuivent les termes de la ſérie qui répreſentent les probabilités qui répondent à 1, 2, 3 &c. obſervations ; or ſi on prend la fraction $\frac{1}{1 - z(a + b(x + x^{-1}))}$ & qu'on la développe en ſérie ſuivant les puiſſances de x, on aura comme l'on ſait $1 + z(a + b(x + x^{-1})) + z^2(a + b(x + x^{-1}))^2 +$ &c. de ſorte que dans cette ſérie le coefficient de z^n ſera la puiſſance n^{eme} de $a + b(x + x^{-1})$; donc ſi on nomme A', A'', A''' &c. les valeurs de A qui répondent à $n = 1, 2, 3$ &c., c'eſt-à-dire, les termes ſans x des puiſſances $a + b(x + x^{-2})$, $(a + b(x + x^{-2}))^2$ &c. il eſt clair que la ſérie $1 + A'z + A''z^2 + A'''z^3 +$ &c. ſera égale à la ſomme des termes ſans x de la fraction $\frac{1}{1 - z(a + b(x + x^{-1}))}$ développée ſuivant les puiſſances de x, & de x^{-1} ; de ſorte que ſi on repreſente par $Z + Z'\left(x + \frac{1}{x}\right) + Z''\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) +$ &c. la ſérie qui réſulte du développement de cette fraction ſuivant les puiſſances de x, & de $\frac{1}{x}$, (car il eſt facile de voir que la ſérie dont-il s'agit doit avoir néceſſairement cette forme) on aura

$Z = 1 + A' z + A'' z^2 +$ &c.; ainſi connoiſſant la fonction Z il n'y aura plus qu'à la réduire en férie ſuivant les puiſſances de z pour avoir les quantités A', A'', A''' &c. Pour cela je réduis d'abord le trinome $1 - a z - b z (x + x^{-1})$ en $(p - q x)(p - q x^{-1})$ ce qui me donne $p^2 + q^2 = 1 - a z$, & $p q = b z$; enſuite je réduis la fraction

$$\frac{1}{(p + q x)(p - q x^{-1})} \text{ en } \alpha + \frac{\beta}{p - q x} + \frac{\beta}{p - q x^{-1}}$$

& je trouve $\alpha = \frac{1}{q^2 - p^2}$, $\beta = \frac{p}{p^2 - q^2}$;

maintenant $\frac{1}{p - q x} = \frac{1}{p} + \frac{qx}{p^2} + \frac{q^2 x^2}{p^3} +$ &c.

& de même $\frac{1}{p - q x^{-1}} = \frac{1}{p} + \frac{q}{p^2 x} + \frac{q^2}{p^3 x^2} +$ &c.

donc on aura $Z = \alpha + \frac{2\beta}{p}$, $Z' = \frac{\beta q}{p^2}$, $Z'' = \frac{\beta q^2}{p^3}$

$Z''' = \frac{\beta q^3}{p^4}$ &c.;

Donc $Z = \frac{1}{q^2 - p^2} + \frac{2}{p^2 - q^2} = \frac{1}{p^2 - q^2} = \frac{1}{(p + q)(p - q)}$;

mais puiſque $p^2 + q^2 = 1 - a z$, & $p q = b z$, on aura $p + q = \sqrt{1 - a z + 2 b z}$, $p - q = \sqrt{1 - a z - 2 b z}$; donc $(p + q)(p - q) = \sqrt{(1 - a z)^2 - 4 b^2 z^2}$; donc enfin

$$Z = \frac{1}{\sqrt{(1 - 2 a z + (a^2 - 4 b^2) z^2)}}$$

$= 1 + A' z + A'' z^2 + A''' z^3 +$ &c.

deſorte que l'on aura par les formules connues

$A' = a$

$$A'' = \frac{3 a A' + 4 b^2 - a^2}{2}$$

$$A''' = \frac{5 a A'' + 2 (4 b^2 - a^2) A'}{3}$$

$$A^{IV} = \frac{7 a A''' + 3 (4 b^2 - a^2) A''}{4}$$

&c.

Dénotons par P', P'', P''' &c. les probabilités que l' erreur soit nulle en prenant le milieu entre 1, 2, 3 &c. observations, & l' on aura $P' = \frac{A'}{a+2b}$, $P'' = \frac{A''}{(a+2b)^2}$ $P''' = \frac{A'''}{(a+2b)^3}$ &c.; d' ou $A' = (a+2b)\,P'$, $A'' = (a+2b)^2\,P''$, $A''' = (a+2b)^3\,P'''$ &c. donc substituant ces valeurs dans les formules précédentes, & faisant pour plus de simplicité $\frac{2b}{a} = r$, on aura $P' = \frac{1}{1+r}$

$$P'' = \frac{3P' + r - 1}{2(1+r)}$$

$$P''' = \frac{5P'' + 2(r-1)P'}{3(1+r)}$$

$$P^{IV} = \frac{7P''' + 3(r-1)P''}{4(1+r)}$$

$$P^{V} = \frac{9P^{IV} + 4(r-1)P'''}{5(1+r)}$$

&c.

Remarque II.

6. Si on fait $r = 1$ on aura le cas du corol. 2, où $a = 2b$, & l' on trouvera

$$P' = \frac{1}{2},\ P'' = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4},\ P''' = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \text{ \&c.}$$

& en général

$$P^{n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}$$

De là on voit que la probabilité diminue toujours à mésure que n augmente, ce que nous avons déjà observé dans le corollaire cité; de sorte qu' en prenant $n = \infty$ la probabilité deviendra infiniment petite, ou nulle; en effet par la quadrature du cercle de Wallis on a (π étant l' arc de 180.° dégrés)

π

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \,..}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \,...}$$

c' est-à-dire, en prenant $n = \infty$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \,......\, 2n \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \,...\, 2n-1 \cdot 2n-1 \cdot 2n+1}$$

donc multipliant par $2n + 1$, & tirant la racine carrée on aura

$$\sqrt{\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \,....\, 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \,...\, 2n-1}$$

donc lorsque $n = \infty$ on aura

$$P^n = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} = 0.$$

Il est bon de remarquer que puisque nous avons trouvé dans le coroll. cité pour la probabilité P^n l' expression

$$\frac{1 + n^2 + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}\right)^2 + \&c.}{4^n}$$

on aura, en comparant cette expression avec la précédente, l' équation

$$1 + n^2 + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}\right)^2 + \&c.$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \,....\, 2n-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \,.....\, n} 2^n$$

laquelle est d' autant plus remarquable qu' elle ne paroît pas aisée à démontrer *a priori.*

Remarque III.

7. Par les formules de la Remarque 1ere on aura en général

$$P^n = \frac{(2n-1) P^{n-1} + (n-1)(r-1) P^{n-2}}{n(r+1)}$$

$$P^{n+1} = \frac{(2n+1) P^n + n(r-1) P^{n-1}}{(n+1)(r+1)}$$

$$P^{n+2} = \frac{(2n+3) P^{n+1} + (n+1)(r-1) P^n}{(n+2)(r+1)}$$

&c.

où les expoſans $n-2$, $n-1$, n &c. de P ne dénotent pas des puiſſances, mais ſeulement le quantième du rang. Or ſi n eſt un nombre aſſez grand, il eſt clair que les fractions $\frac{2n-1}{n}$, $\frac{2n+1}{n+1}$, $\frac{2n+3}{n+2}$ &c. ſeront à très-peu près $= 2$; & que les fractions $\frac{n-1}{n}$, $\frac{n}{n+1}$, $\frac{n+1}{n+2}$ ſeront auſſi à très-peu près $= 1$; de ſorte qu'on aura dans cette hypothèſe

$$P^n = \frac{P^{n-1} + (r-1)\,P^{n-2}}{r+1}$$

$$P^{n+1} = \frac{P^n + (r-1)\,P^{n-1}}{r+1}$$

&c.

d'où l'on voit que les quantités P^n, P^{n+1} &c. forment une ſuite recurrante dont le dénominateur de la fraction génératrice feroit $x^2 - \frac{x}{r+1} - \frac{r-1}{r+1}$; ainſi on aura en général

$$P^{n+s} = A\left(\frac{1+\sqrt{(r^2-3)}}{2\,(1+r)}\right)^s + B\left(\frac{1-\sqrt{(4r^2-3)}}{2\,(1+r)}\right)^s$$

& pour déterminer les coefficiens A, & B, on ſuppoſera que les termes P^n, & P^{n+1} ſoient connus, ce qui donnera $P^n = A + B$, &

$$P^{n+1} = A\,\frac{1+\sqrt{(4r^2-3)}}{2\,(1+r)} + B\,\frac{1-\sqrt{(4r^2-3)}}{2\,(1+r)}$$

d'où

$$A = \frac{2\,(1+r)\,P^{n+1} - (1-\sqrt{(4r^2-3)})\,P^n}{2\sqrt{(4r^2-3)}}$$

$$B = \frac{(1+\sqrt{(4r^2-3)})\,P^n - 2\,(1+r)\,P^{n+1}}{2\sqrt{(4r^2-3)}}$$

d' où

$$P^{n+s} = \left(\frac{P^n}{2} + \frac{2(1+r)\,P^{n+1} - P^n}{2\sqrt{(4r^2-3)}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{(4r^2-3)}}{2(1+r)}\right)^s$$

$$+ \left(\frac{P^n}{2} - \frac{2(1+r)\,P^{n+1} - P^n}{2\sqrt{(4r^2-3)}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{(4r^2-3)}}{2(1+r)}\right)^s$$

& cette formule ſera d' autant plus exacte qu' on prendra le nombre n plus grand.

Ainſi après avoir calculé les termes P^n & P^{n+1} ſoit par les formules de l' art. 1, ſoit par celles de la Remarque 1.ere, on pourra trouver, à très-peu près, tous les termes ſuivans par la formule précédente.

Au reſte il eſt facile de voir par cette formule que la probabilité ſera nulle à l' infini; c' eſt-à-dire, lorſque $s = \infty$; en effet il eſt clair que quel que ſoit r, pourvu que ce ſoit un nombre poſitif, les quantités $\frac{1 \pm \sqrt{(4r^2-3)}}{2(1+r)}$ ſeront toujours < 1; car ſuppoſons, s'il eſt poſſible $\frac{1 \pm \sqrt{(4r^2-3)}}{2(1+r)} > 1$ on aura donc $4r^2 - 2 \pm 2\sqrt{(4r^2-3)}$ $> 4(1 + 2r + r^2)$ ſavoir $\pm \sqrt{(4r^2-3)} > 3 + 4r$; & $4r^2 - 3 > 16r^2 + 24r + 9$ ſavoir $o > 12r^2 + 24r + 12$, ce qui ne ſe peut; donc en faiſant $s = \infty$ les quantités $\left(\frac{1+\sqrt{(4r^2-3)}}{2(1+r)}\right)^s$, & $\left(\frac{1-\sqrt{(4r^2-3)}}{2(1+r)}\right)^s$ deviendront nulles; & par conſéquent P^{n+s} auſſi.

Scholie.

8. Soit p le réſultat que chaque obſervation devroit donner ſi elle étoit exacte, puiſque on ſuppoſe que l'on puiſſe ſe tromper d'une unité tant en plus qu'en moins, on aura dans chaque obſervation un de ces trois réſultats

p, $p-1$, & $p+1$; donc ſi on a deux obſervations, & qu' on prenne le milieu entre leurs réſultats, c'eſt-à-dire, la demi ſomme de ces réſultats, on aura un de ces cinq réſultats $\frac{2p}{2}$, $\frac{2p-1}{2}$, $\frac{2p+1}{2}$, $\frac{2p-2}{2}$, $\frac{2p+2}{2}$; ſavoir p, $p-\frac{1}{2}$, $p+\frac{1}{2}$, $p-1$, $p+1$; ainſi, dans ce cas, l' erreur pourra être 1, ou $\frac{1}{2}$ tant en plus qu' en moins; on verra de même, qu' en prenant le milieu entre trois obſervations, l' erreur pourra être, 1, ou $\frac{2}{3}$, ou $\frac{1}{3}$ tant en plus qu' en moins, & ainſi de ſuite. Ainſi quoique la probabilité que l' erreur ſoit nulle puiſſe être plus petite lorſqu' on prend le réſultat moyen de pluſieurs obſervations, que lorſque on prend le réſultat de chaque obſervation en particulier; cependant ſi on cherche la probabilité que l' erreur ne ſurpaſſe pas $\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{3}$ &c. on trouvera que cette probabilité ſera plus grande dans le premier cas que dans le ſecond; en effet, dans le premier cas il n' y a d' autres cas favorables que ceux où l' erreur eſt abſolument nulle; mais dans le ſecond, les cas favorables ſont non ſeulement ceux où l' erreur eſt nulle, mais auſſi ceux où l' erreur eſt $\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{3}$ &c.; & c'eſt par cette conſidération qu' il eſt toujours plus avantageux de prendre le milieu entre les réſultats de pluſieurs obſervations, que de s' en tenir au réſultat de chaque obſervation en particulier. Nous allons examiner la queſtion ſous ce point de vue dans le problême ſuivant.

Problême II.

9. Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans le problême précédent trouver la probabilité qu' en prenant le milieu entre les réſultats de n obſervations, l' erreur ne ſurpaſſera pas la fraction $\frac{m}{n}$, m étant $< n$.

En prenant le milieu entre les réſultats de n obſervations, il eſt clair que l'erreur peut être, ou o, ou $\pm\frac{1}{n}$, ou $\pm\frac{2}{n}$, ou $\pm\frac{3}{n}$ &c. juſqu'à $\pm\frac{n}{n}$ ſavoir ± 1; ainſi la probabilité que l'erreur ne ſoit pas plus grande que $\pm\frac{m}{n}$, ſera la ſomme des probabilités que l' erreur ſera nulle, ou $\pm\frac{1}{n}$, ou $\pm\frac{2}{n}$ &c. juſqu' à $\pm\frac{m}{n}$. Voyons donc d' abord quelle eſt la probabilité que l' erreur ſera $\pm\frac{\mu}{n}$.

En ramenant cette queſtion aux dès, comme nous l'avons pratiqué dans le probl. 1., il eſt clair qu' elle ſe réduit à chercher la probabilité d' améner $+\mu$, ou $-\mu$ points avec n dès, dont chacun ait a faces marquées zéro, b faces marquées $+1$, & b faces marquées -1. Pour cela il n' y a qu' à éléver le trinome $a + b\ (x + x^{-1})$ à la puiſſance n, & le coefficient de x^{μ} dénotera le nombre des cas où la ſomme des points de tous les dès ſera μ, de même que celui de $x^{-\mu}$ dénotera le nombre des cas où la ſomme des points ſera $-\mu$; ainſi la ſomme de ces deux coefficiens diviſée par $(a + 2\ b)^n$, qui eſt le nombre de tous les cas, donnera la probabilité cherchée.

Or on a $(a + b(x + x^{-1}))^n = a^n + n\, a^{n-1}\, b\, (x + x^{-1}) + \frac{n(n-1)}{2}\, a^{n-2}\, b^2\, (x + x^{-1})^2 +$ &c., & de plus

$$(x + x^{-1})^2 = x^2 + x^{-2} + 2$$
$$(x + x^{-1})^3 = x^3 + x^{-3} + 3\,(x + x^{-1})$$
$$(x + x^{-1})^4 = x^4 + x^{-4} + 4\,(x^2 + x^{-2}) + \frac{4 \cdot 3}{2}$$
$$(x + x^{-1})^5 = x^5 + x^{-5} + 5\,(x^3 + x^{-3}) + \frac{5 \cdot 4}{2}\,(x + x^{-1})$$

& ainsi de suite ;

Donc si on suppose $(a + b(x + x^{-1}))^n = A + B\,(x + x^{-1}) + C\,(x^2 + x^{-2}) + D\,(x^3 + x^{-3}) +$ &c.
on aura

$$A = a^n + \frac{2}{1} \cdot \frac{n(n-1)}{2}\, a^{n-2}\, b^2 + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}\, a^{n-4}\, b^4 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{n(n-1) \ldots (n-5)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\, a^{n-6}\, b^6 + \text{\&c.}$$

$$B = n\, a^{n-1}\, b + \frac{3}{1} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}\, a^{n-3}\, b^3 + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\, a^{n-5}\, b^5 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{n(n-1) \ldots (n-6)}{2 \cdot 3 \ldots 7}\, a^{n-7}\, b^7 + \text{\&c.}$$

$$C = \frac{n(n-1)}{2}\, a^{n-2}\, b^2 + \frac{4}{1} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}\, a^{n-4}\, b^4 + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n(n-1) \ldots (n-5)}{2 \cdot 3 \ldots 6}\, a^{n-6}\, b^6 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{n(n-1) \ldots (n-7)}{1 \cdot 2 \ldots 8}\, a^{n-8}\, b^8 + \text{\&c.}$$

& ainsi de suite.

Donc si on appelle M le terme de la série A, B, C &c. dont le quantième sera $\mu + 1$, il est facile de

voir qu' on aura

$$M = \frac{n(n-1)\ldots.(n-\mu+1)}{1.2\ldots\ldots\mu} a^{n-\mu} b^{\mu}$$
$$+ \frac{\mu+2}{1} . \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-\mu-1)}{1.2\ldots\ldots\mu+2} a^{n-\mu-2} b^{\mu+2}$$
$$+ \frac{(\mu+4)(\mu+3)}{1.2} . \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-\mu-3)}{1.2\ldots\ldots\mu+4} a^{n-\mu-4} b^{\mu+4}$$
$$+ \&c.$$

Or ce terme M eſt le coefficient des puiſſances x^{μ} & $x^{-\mu}$; de ſorte qu' on aura $\frac{2M}{(a+2b)^n}$ pour la probabilité que l'erreur ſoit $\pm \frac{\mu}{n}$. Ainſi la probabilité que l' erreur ne ſurpaſſera pas $\pm \frac{\mu}{n}$ ſera repréſentée par la ſérie

$$\frac{A+2B+2C+2D+\&c.+2M}{(a+2b)^n}.$$

Pour faciliter la recherche des valeurs de A, B, C &c. il eſt bon de faire voir comment ces quantités dépendent les unes des autres; pour cela on reprendra l' équation

$$(a+b(x+x^{-1}))^n = A + B(x+x^{-1})$$
$$+ C(x^2+x^{-2}) + D(x^3+x^{-3}) + \&c.$$

& prenant les différentielles logarithmiques on aura après avoir diviſé par $\frac{dx}{x}$

$$\frac{nb\left(x-\frac{1}{x}\right)}{a+b(x+x^{-1})} = \frac{B\left(x-\frac{1}{x}\right)+2C\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)+\&c.}{A+B(x+x^{-1})+C(x^2+x^{-2})+\&c}$$

donc multipliant en croix, il viendra

$$nbA(x-x^{-1}) + nbB(x^2-x^{-2}) + nbC(x^3-{}^{-3}-x+x^{-1})$$
$$+ nbD(x^4-x^{-4}-x^2+x^{-2}) + \&c. =$$
$$aB(x-x^{-1}) + 2aC(x^2-x^{-2}) + 3aD(x^3-x^{-3}) + \&c.$$
$$+ bB(x^2-x^{-2}) + 2bC(x^3-x^{-3}+x-x^{-1})$$
$$+ 3bD(x^4-x^{-4}+x^2-x^{-2}) + \&c.$$

de sorte qu' en comparant les termes on aura

$nb\ (A - C) = a\ B + 2\ b\ C$

$nb\ (B - D) = 2\ a\ C + b\ (B + 3\ D)$

$nb\ (C - E) = 3\ a\ D + b\ (2\ C + 4\ E)$

&c.

d' où en faisant pour plus de simplicité $\frac{a}{b} = K$, on aura

$$C = \frac{n\ A - K\ B}{n + 2}$$

$$D = \frac{(n - 1)\ B - 2\ K\ C}{n + 3}$$

$$E = \frac{(n - 2)\ C - 3\ K\ D}{n + 4}$$

&c.

Ainsi en connoissant les deux premiers termes A, & B on pourra trouver successivement tous les autres.

Corollaire.

10. Supposons, comme dans l' art. 2, $a = b$, ensorte que l' on ait $K = 1$, & faisant successivement $n = 1, 2, 3$ &c. & $a = 1$, ce qui est permis, on trouvera les valeurs suivantes

n	A	B	C	D	E	F	G	&c.
1	1	1	0	0	0	0	0	
2	3	2	1	0	0	0	0	
3	7	6	3	1	0	0	0	
4	19	16	10	4	1	0	0	
5	51	45	30	15	5	1	0	
6	141	126	90	50	21	6	1	
&c.								

De là on formera la table suivante des probabilités

Valeurs

Valeurs du nombre n des obſerv.	Probabilités que l' erreur ne ſurpaſſera pas les fractions $\pm \frac{0}{n}$	$\pm \frac{1}{n}$	$\pm \frac{2}{n}$	$\pm \frac{3}{n}$	$\pm \frac{4}{n}$	$\pm \frac{5}{n}$
1	$\frac{1}{3}$	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
2	$\frac{3}{9}$	$\frac{7}{9}$	. . .	. . .	. . .	. . .
3	$\frac{7}{27}$	$\frac{19}{27}$	$\frac{25}{27}$	. . .	. . .	. . .
4	$\frac{19}{81}$	$\frac{51}{81}$	$\frac{71}{81}$	$\frac{79}{81}$	. . .	. . .
5	$\frac{51}{243}$	$\frac{141}{243}$	$\frac{201}{243}$	$\frac{231}{243}$	$\frac{241}{243}$	. . .
6	$\frac{141}{729}$	$\frac{393}{729}$	$\frac{573}{729}$	$\frac{673}{729}$	$\frac{715}{729}$	$\frac{727}{729}$
&c.						

On voit par cette table, qu'en prenant le milieu entre deux obſervations, la probabilité que l'erreur ſoit nulle ſera $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, & celle que l' erreur ne ſurpaſſera pas $\frac{1}{2}$ tant en plus qu' en moins ſera $\frac{7}{9}$; or dans chaque obſervation particulière, il y a $\frac{1}{3}$ de probabilité que l' erreur ſera o, & comme (hyp.) l' erreur ne peut être que o

ou $\pm$ 1, il eſt clair que la probabilité que l'erreur ne ſurpaſſera pas $\frac{1}{2}$ ſera de même $\frac{1}{3}$; ainſi quoique la probabilité que l'erreur ſera nulle ſoit la même, ſoit qu'on prenne le réſultat moyen entre deux obſervations, ou qu'on prenne le réſultat particulier d'une obſervation unique, cependant la probabilité que l'erreur ne ſurpaſſera pas $\frac{1}{2}$ ſera plus grande dans le premier cas que dans le ſecond, ces deux probabilités étant comme $\frac{7}{9} : \frac{1}{3}$, c'eſt-à-dire, dans la raiſon de 7 : 3.

De même en prenant le milieu entre trois obſervations on aura $\frac{7}{27}$ pour la probabilité que l'erreur ſera nulle, $\frac{29}{27}$ pour la probabilité que l'erreur ne ſera pas $> \pm \frac{1}{3}$, & $\frac{25}{27}$ pour celle que l'erreur ne ſera pas $> \pm \frac{2}{3}$; mais dans chaque obſervation particulière la probabilité que l'erreur ſoit nulle eſt $\frac{1}{3}$, & celle que l'erreur ne ſurpaſſe pas $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$ eſt de même $\frac{1}{3}$ parceque (hyp.) l'erreur ne peut être que nulle, ou $\pm$ 1; donc la probabilité que l'erreur ſoit nulle ſera, à la vérité, plus grande dans le réſultat particulier d'une obſervation unique que dans le réſultat moyen de trois obſervations, & cela dans la raiſon de 9 : 7; mais, en revanche, la probabilité que l'erreur ne ſurpaſſera pas $\pm \frac{1}{3}$ ſera plus grande dans le ſecond cas que dans le premier en raiſon de 19 : 9, & celle que l'erreur ne ſurpaſſera pas $\pm \frac{2}{3}$ le ſera encore davantage, cette pro-

babilité étant, dans le ſecond cas, plus grande que dans le premier en raiſon de 25 : 9.

Voilà donc en quoi conſiſte principalement l'avantage qu'il y a à prendre le milieu entre les réſultats de plusieurs obſervations. Pour rendre la choſe encor plus ſenſible nous allons rechercher les probabilités que l'erreur ne ſurpaſſera pas la fraction $\frac{1}{2}$ en ſuppoſant ſucceſſivement $n = 1$ 2, 3, &c. c'eſt-à-dire, pour une obſervation unique, pour deux, pour trois &c., & nous aurons

n	1	2	3	4	5	6	&c.
prob.	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{19}{27}$	$\frac{71}{81}$	$\frac{201}{243}$	$\frac{673}{729}$	&c.

ou bien en reduiſant au même dénominateur 729.

n	1	2	3	4	5	6	&c.
prob.	$\frac{243}{729}$,	$\frac{567}{729}$,	$\frac{513}{729}$,	$\frac{639}{729}$,	$\frac{603}{729}$,	$\frac{673}{729}$,	&c.

On voit par là que la probabilité que l'erreur ne ſurpaſſera pas $\frac{1}{2}$ va en augmentant à meſure que l'on prend un plus grand nombre d'obſervations, mais avec cette différence, que la probabilité eſt plus grande pour deux obſervations que pour trois, pour quatre que pour cinq, & en général pour un nombre pair quelconque que pour le nombre impair qui le ſuit immédiatement; de ſorte que dans l'hypothèſe dont il s'agit, il eſt plus avantageux de ne prendre le milieu qu'entre un nombre quelconque pair d'obſervations.

Remarque I.

11. Nous avons vu dans l'art. 5. que ſi on développe la fraction

$$\frac{1}{1 - z\left(a + b\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)}$$ en une ſérie de cette forme

$$Z + Z'\left(x + \frac{1}{x}\right) + Z''\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \text{\&c.}$$

Z, Z', Z'' &c. étant des fonctions de z; on aura $Z = \frac{1}{p^2 - q^2}$, $Z' = \frac{\beta q}{p^2} = \frac{q}{p} Z$, $Z'' = \frac{\beta q^2}{p^3} = \frac{p}{q} Z'$ & ainsi de suite, p, & q étant telles que $p^2 + q^2 = 1 - az$ & $pq = bz$, ce qui donne $p^2 - q^2 = \sqrt{(1 - 2az + (a^2 - 4b^2)z^2)}$ & de là $\frac{q}{p} = \frac{1 - az - \sqrt{(1 - 2az + (a^2 - 4b^2)z^2)}}{2bz}$ de sorte qu'en faisant pour plus de simplicité

$$\zeta = \sqrt{(1 - 2az + (a^2 - 4b^2)z^2)}$$

on aura

$$Z = \frac{1}{\zeta},\ Z' = \frac{1 - az - \zeta}{2bz\zeta},$$

$$Z'' = \left(\frac{1 - az - \zeta}{2bz}\right)^2 \frac{1}{\zeta},\ \text{\& en général}$$

$$Z^{\mu} = \frac{\left(\frac{1 - az - \zeta}{2bz}\right)^{\mu}}{\zeta}$$

Or si on développe cette quantité en une série de puissances rationelles & entieres de z, on verra aisément par ce que nous avons dit plus haut, que le coefficient d'une puissance quelconque, comme z^n, dénotera le nombre des cas où la somme des erreurs de n observations pourra être $+\mu$, ou $-\mu$, de sorte que le double de ce coefficient exprimera le nombre de tous les cas où l'erreur moyenne sera $\pm\frac{\mu}{n}$. De là il est facile de conclure que la quantité

$$\frac{1 + 2\,\frac{1 - az - \zeta}{2bz} + 2\left(\frac{1 - az - \zeta}{2bz}\right)^2 + \&c. + 2\left(\frac{1 - az - \zeta}{1bz}\right)^{\mu}}{\zeta}$$

étant regardée comme une fonction de z & développée suivant les puissances de cette variable, donnera une série

de telle nature que le coefficient d' une puiſſance quelconque z^n exprimera juſtement le nombre de cas où l' erreur moyenne pourra être renfermée dans ces limites $-\frac{\mu}{n}$, $+\frac{\mu}{n}$; de ſorte que ce coefficient étant diviſé par le nombre total de cas $(a + 2b)^n$ on aura la valeur de la probabilité que l' erreur moyenne ne ſurpaſſera pas la fraction $\frac{\mu}{n}$ ſoit en plus ou en moins. Or la quantité dont il s' agit n' étant autre choſe qu' une ſérie géometrique, elle peut ſe mettre ſous cette forme plus ſimple

$$2\,\frac{1 - \left(\frac{1 - a z - \zeta}{2 b z}\right)^{\mu+1}}{\zeta\left(1 - \frac{1 - a z - \zeta}{2 b z}\right)} - 1$$

Ainſi toute la difficulté conſiſtera à reduire cette même quantité en ſérie infinie qui procède ſuivant les puiſſances de z. Pour en venir plus facilement à bout, on la ſuppoſera = à une indéterminée y, & l' on aura une équation entre y, & z, qu' on pourra, par des différentiations, délivrer, tant de la puiſſance $\mu + 1$, que de l' irrationalité de ζ; par ce moyen on aura une équation différentielle du ſecond degré entre y, & z; & il n' y aura plus qu' à ſuppoſer $y = 1 + A z + B z^2 +$ &c. & déterminer les coefficiens A, B &c. par la comparaiſon des termes.

Au reſte comme ce calcul eſt un peu long nous nous contentons de l' indiquer ici, pour mettre ſur la voie ceux qui voudront pouſſer cette théorie plus loin.

Scholie.

12. Nous avons ſuppoſé dans les deux problêmes précédens qu' il y avoit un nombre égal de cas pour avoir une erreur poſitive, & pour en avoir une négative; ſi cela n' étoit pas ainſi, & que le nombre des cas qui donneroient o, $+1$, & -1 d' erreur fuſſent a, b, & c, alors on pourroit reſoudre les problêmes avec la même facilité en conſidérant le trinome $a + bx + cx^{-1}$, à la place de $a + b(x + x^{-1})$ pour avoir le nombre des cas où l' on auroit une erreur moyenne donnée; & prenant enſuite $(a + b + c)^n$ pour avoir le nombre total des cas à la place de $(a + 2b)^n$; on pourroit même, ſans faire un nouveau calcul, adapter à ce cas-ci les formules que nous avons déjà trouvées; car ſi dans le trinome $a + bx + \frac{c}{x}$ on met $x\sqrt{\frac{c}{b}}$ à la place de x, il deviendra $a + \sqrt{bc}\left(x + \frac{1}{x}\right)$; ainſi il n' y aura qu' à mettre dans le trinome $a + b\left(x + \frac{1}{x}\right)$ des problêmes précédens $\sqrt{bc}$ à la place de b, & enſuite $x\sqrt{\frac{b}{c}}$ à la place de x; du reſte nous allons traiter ce cas d' une manière beaucoup plus générale dans le problême ſuivant.

Problême III.

13. Suppoſant que chaque obſervation ſoit ſujette à une erreur d' une unité en moins, & à une erreur de r unités en plus, & que le nombre des cas qui peuvent donner o, -1, $+r$ d' erreur ſoit reſpectivement a, b, c, on demande qu' elle eſt la probabilité que l' erreur moyenne de pluſieurs obſervations ſera renfermée dans des limites données.

Soit n le nombre des obſervations dont on veut prendre le milieu, on formera la puiſſance n^{eme} du trinome $a + \frac{b}{x} + c\,x^r$, & le coefficient d'une puiſſance quelconque x^μ dénotera le nombre des cas où la ſomme des erreurs ſera μ, & par conſéquent, où l'erreur moyenne ſera $\frac{\mu}{n}$. Conſiderons donc la quantité $\left(a + \frac{b}{x} + c\,x^r\right)^n$, laquelle ſe réduit à $\frac{(b + x\,(a + c\,x^r))^n}{x^n}$, & l'on aura, comme l'on ſait, $(b + x\,(a + c\,x^r))^n =$

$$b^n + n\,b^{n-1}\,x\,(a + c\,x^r) + \frac{n\,(n-1)}{2}\,b^{n-2}\,x^2(a + c\,x^r)^2 + \&c.$$

d'où il eſt facile de voir que le coéfficient d'une puiſſance quelconque x^s ſera

$$\frac{n\,(n-1)\ldots\ldots n-s+1}{2\,.\,3\,\ldots\ldots\ldots s}\,b^{n-s}\,a^s$$

$$+\frac{n\,(n-1)\ldots\,n-s+r}{2\,.\,3\,\ldots\ldots\,s-r}\,.\,\frac{s-}{1}\,b^{n-s+r}\,a^{s-r}\,c$$

$$+\frac{n\,(n-1)\ldots n-s+2\,r}{2\,.\,3\,\ldots\,s-2\,r}\,.\,\frac{(s-2\,r)\,(s-2\,r-1)}{1\,.\,2}\,b^{n-s+2r}\,a^{s-2r}\,c^9$$

$+$ &c.

cette ſérie étant continuée juſqu'à ce que l'on parvienne à des termes négatifs, donc ce coéfficient ſera celui de la puiſſance x^{s-n} dans la quantité $\left(a + \frac{b}{x} + c\,x^r\right)^n$; donc ſi on déſigne en général par (μ) le coéfficient de la puiſſance x^μ de cette derniere quantité, on aura

$$(\mu) = \frac{n\,(n-1)\ldots\ldots 1-\mu}{2\,.\,3\,\ldots\,\mu+n}\,.\,b^{-\mu}\,a^{\mu+n}$$

$$+\frac{n\,(n-1)\ldots\ldots r-\mu}{2\,.\,3\,\ldots\,\mu+n-r-1}\,b^{r-\mu}\,a^{\mu+n-r}\,c$$

$$+ \frac{n\,(n-1)\,\ldots\ldots\ldots 2r-\mu}{2\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,\mu+n-2r-2}\; b^{2r-\mu}\; a^{\mu+n-2r}\; c^{2}$$

$+$ &c.

où il faudra toujours omettre les termes qui contiendroient des puiſſances négatives de a, ou b.

Donc, puiſque pour n obſervations la ſomme de tous les cas eſt $(a+b+c)^n$, on aura pour la probabilité que l'erreur moyenne ſoit $\frac{\mu}{n}$ la quantité $\frac{(\mu)}{(a+b+c)^n}$; & de là la probabilité que l' erreur moyenne ſera renfermée entre ces limites $-\frac{p}{n}$, $+\frac{q}{n}$ ſera exprimée par la ſérie

$$\frac{(-p+1)+\text{\&c.}+(-1)+(0)+(1)+\text{\&c.}+(q-1)}{(a+b+c)^n}$$

Problême IV.

14. Suppoſant tout, comme dans le problême précédent, on demande quelle eſt l' erreur moyenne pour laquelle la probabilité eſt la plus grande.

Nous avons vu que la probabilité que l' erreur moyenne ſoit $\frac{\mu}{n}$ eſt $= \frac{(\mu)}{(a+b+c)^n}$, (μ) étant le coéfficient de la puiſſance x^μ du trinome $\left(a+\frac{b}{x}+c\,x^r\right)^n$; ainſi il ne s' agit que de ſavoir quel eſt le terme de la puiſſance n^{eme} de $a+\frac{b}{x}+c\,x^r$ qui aura le plus grand coéfficient; pour cela il eſt clair qu' il n' y a qu' à chercher le plus grand terme du trinome $a+b+c$ élevé à la puiſſance n; car ſuppoſant que ce terme ſoit $\pi\, a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma$, α, β, γ étant les expoſans de a, b, c dont la ſomme doit être égale à n, & π le coefficient de ce terme, il n'y aura qu'

qu' à mettre $\frac{b}{x}$ à la place de b, & $c x^r$ à la place de c, & l' on aura $\pi a^\alpha b^\beta c^\gamma x^{-\beta + r\gamma}$ pour le terme cherché de la puissance n^{eme} du trinome $a + \frac{b}{x} + c x^r$; ainsi on fera $-\beta + r\gamma = \mu$, & l' on aura $\frac{r\gamma - \beta}{n}$ pour l' erreur moyenne dont la probabilité sera la plus grande.

Or, par les règles des combinaisons, on sait que le coefficient π du terme $\pi a^\alpha b^\beta c^\gamma$, doit être

$$= \frac{1 . 2 . 3 \ldots\ldots\ldots n}{1 . 2 . 3 \ldots \alpha . 1 . 2 . 3 \ldots \beta . 1 . 2 . 3 \ldots \gamma}$$

dénotons ce terme par M ensorte que l' on ait

$$\frac{1 . 2 . 3 \ldots\ldots\ldots n\, a^\alpha b^\beta c^\gamma}{1 . 2 . 3 \ldots \alpha . 1 . 2 . 3 \ldots \beta . 1 . 2 . 3 \ldots \gamma} = M$$

& il faudra qu' en faisant varier les exposans α, β, γ, la valeur de M diminue; faisons donc varier α d' une unité, ensorte que α devienne $\alpha + 1$, & comme $\alpha + \beta + \gamma = n$, il faudra que β, ou γ diminue en même tems d' une unité; or il est facile de voir que si dans la valeur de M on met $\alpha + 1$ pour α, & $\beta - 1$ pour β, cette valeur deviendra $\frac{\beta}{\alpha + 1} \times \frac{aM}{b}$, donc $\frac{\beta}{\alpha + 1} \times \frac{aM}{b} < M$

& par conséquent $\frac{\beta}{\alpha + 1} \times \frac{a}{b} < 1$;

réciproquement, si on augmente β d' une unité, & qu' on diminue α aussi d' une unité, on trouvera la condition $\frac{\alpha}{\beta + 1} \times \frac{b}{a} < 1$; ainsi il faudra que l'on ait en même tems $\frac{\alpha}{\beta + 1} < \frac{a}{b}$ & $\frac{\alpha + 1}{\beta} > \frac{a}{b}$. Or c' est ce qui aura lieu si $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{b}$;

On trouvera de la même manière $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{a}{c}$; de ſorte qu'en prenant un coefficient indéterminé p, on aura dans le cas du *maximum* $\alpha = p\,a$, $\beta = p\,b$, $\gamma = p\,c$; mais $\alpha + \beta + \gamma = n$; donc $p = \frac{n}{a + b + c}$; donc enfin $\alpha = \frac{n\,a}{a+b+c}$, $\beta = \frac{n\,b}{a+b+c}$, $\gamma = \frac{n\,c}{a+b+c}$

Si les quantités $\frac{n\,a}{a+b+c}$, $\frac{n\,b}{a+b+c}$, $\frac{n\,c}{a+b+c}$ ſont des nombres entiers, on aura exactement $\alpha = \frac{n\,a}{a+b+c}$, $\beta = \frac{n\,b}{a+b+c}$, $\gamma = \frac{n\,c}{a+b+c}$ comme nous venons de le trouver; mais ſi ces quantités ne ſont pas des nombres entiers, alors il faudra prendre pour α, β, γ les nombres entiers qui en feront les plus proches; on peut prendre cependant, pour plus de ſimplicité, ces mêmes quantités pour les valeurs de α, β, γ, car l'erreur, s'il y en a, ne pourra jamais être que très-petite; de cette manière nous aurons pour l'erreur moyenne qui a la plus grande probabilité l'expreſſion $\frac{r\gamma - \beta}{n} = \frac{r\,c - b}{a+b+c}$.

Corollaire.

15. De là il s'enſuit qu'on peut toujours regarder la quantité $\frac{r\,c - b}{a+b+c}$ comme l'erreur du réſultat moyen, & qu'ainſi on peut prendre la même quantité pour la correction de ce réſultat.

Lorſque $r = 1$, & $c = b$, comme dans l'hypothèſe du prob. 1, la correction du réſultat moyen devient nulle; elle le feroit auſſi ſi l'on avoit $b = r\,c$; mais dans tous

les autres cas elle ſera d' autant plus grande que $r c$ différera davantage de b.

Problême V.

16. On ſuppoſe que chaque obſervation ſoit ſujette à des erreurs quelconques données, & qu'on connoiſſe en même tems le nombre des cas, où chaque erreur peut avoir lieu; on demande la correction qu' il faudra faire au réſultat moyen de pluſieurs obſervations.

Soient p, q, r, s &c. les erreurs auxquelles chaque obſervation eſt ſujette, & a, b, c, d &c. les cas qui peuvent donner ces erreurs, ſavoir a le nombre des cas qui donneroient l' erreur p, b le nombre des cas qui donneroient l' erreur q, & ainſi des autres; il eſt clair, par ce que nous avons demontré dans les problêmes précédens, que ſi on élève le polinome $a x^p + b x^q + c x^r +$ &c. à la puiſſance n, & qu' on dénote par M le coefficient de la puiſſance x^μ, on aura $\frac{M}{(a + b + c + \&c.)^n}$ pour la probabilité que l' erreur du réſultat moyen de n obſervations ſoit $\frac{\mu}{n}$. Or on ſait par la théorie des combinaiſons que le coefficient M ſera de cette forme

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots\ldots\ldots n\, a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\ldots}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \alpha \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots \gamma \ldots\ldots}$$

où les expoſans α, β, γ &c. doivent être tels que $\alpha + \beta + \gamma + \&c. = n$, & $\alpha p + \beta q + \gamma r + \&c. = \mu$ De plus, il eſt facile de démontrer, par une méthode ſemblable à celle du problême précédent, que le coéfficient M ſera le plus grand lorſque on aura

$$\alpha = \frac{n a}{a + b + c + \&c.}$$

$$\beta = \frac{n b}{a + b + c + \&c.}$$

$$\gamma = \frac{n c}{a \pm b \pm c \pm \&c.}$$

d' où il s' ensuit, que l' erreur moyenne, pour laquelle la probabilité sera la plus grande, sera exprimée par $\frac{\mu}{n} = \frac{ap + bq + cr + \&c.}{a + b + c + \&c.}$
Ainsi cette quantité représentera la correction qu'il faudra faire au résultat moyen de plusieurs observations.

Corollaire I.

17. Si on regarde les quantités a, b, c &c. comme des poids appliqués à une droite indéfinie, à des distances égales à p, q, r &c. d' un point fixe pris dans cette droite, & qu' on cherche le centre de gravité de ces poids, la distance de ce centre au point fixe sera la correction qu' il faudra faire au résultat moyen de plusieurs observations; cela suit évidemment de la formule que nous avons trouvée plus haut pour la valeur de cette correction.

Corollaire II.

18. Donc, si on suppose que chaque observation soit sujette à toutes les erreurs possibles, qui peuvent être comprises entre des limites données, & qu' on connoisse la courbe de la facilité des erreurs, dans laquelle les abscisses étant supposées représenter les erreurs, les ordonnées réprésentent les facilités de ces erreurs, il n' y aura qu' à chercher le centre de gravité de l' aire totale de cette courbe, & l' abscisse répondante à ce centre exprimera la correction du résultat moyen. De là on voit que si la courbe, dont il s'agit, est égale, est semblable de côté & d' autre de l' ordonnée qui passe par l' origine des abscisses, ensorte que cette ordonnée soit un diamêtre de la courbe dont il s' agit, alors la correction sera nulle, le centre de gravité tombant nécessairement dans le diamêtre.

Ce cas a lieu toutes les fois que les erreurs peuvent être également positives & négatives.

Problême VI.

19. Je suppose qu'on ait vérifié un instrument quelconque, & qu'ayant réitéré plusieurs fois la même vérification on ait trouvé différentes erreurs, dont chacune se trouve répétée un certain nombre de fois; on demande quelle est l'erreur qu'il faudra prendre pour la correction de l'instrument.

Soient p, q, r &c. les erreurs trouvées, & soient α, β, γ &c. les nombres qui marquent combien de fois chaque erreur s'est trouvée répétée en faisant n vérifications; supposons que le nombre des cas qui peuvent donner l'erreur p, ou q, ou r &c. soit désigné respectivement par a, b, c &c.; qu'on élève le polinome $a\,x^p + b\,x^q + c\,x^r +$ &c. à la puissance n, & soit $N\,(a\,x^p)^\alpha\,(b\,x^q)^\beta\,(c\,x^r)^\gamma \ldots$ un terme quelconque de ce polinome, le coefficient $N\,a^\alpha\,b^\beta\,c^\gamma \ldots$ de la puissance $p\,\alpha + q\,\beta + r\,\gamma +$ &c. de x divisé par $(a + b + c +$ &c.$)^n$ dénotera la probabilité que les erreurs p, q, r &c. se trouvent combinées ensemble, de manière que p soit répété α fois, q β fois, r γ fois, & ainsi des autres. Ainsi cette probabilité sera la plus grande dans la combinaison où la valeur de $N\,a^\alpha\,b^\beta\,c^\gamma \ldots$&c. sera la plus grande;

mais on a $N. = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\,n}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,\alpha\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,\beta\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,\gamma\ldots}$

comme nous l'avons déja vu dans le problême précédent; donc, par le même problême, la plus grande valeur de $N\,a^\alpha\,b^\beta\,c^\gamma \ldots$ aura lieu lorsque

$$\alpha = \frac{n\,a}{a + b + c + \&c.}$$

$$\beta = \frac{n\,b}{a + b + c + \&c.}$$

$$\gamma = \frac{n\,c}{a + b + c + \&c.}$$

équations par lesquelles on pourra déterminer les inconnues a, b, c &c.; & l' on aura, en faisant $a + b + c +$ &c. $= s$, $a = \frac{s\,\alpha}{n}$, $b = \frac{s\,\beta}{n}$, $c = \frac{s\,\gamma}{n}$ &c.

Or nous avons démontré dans le problême cité, que la correction qu' il faut faire au résultat moyen d' un nombre quelconque d'observations est exprimée par $\frac{ap + bq + cr + \&c.}{a + b + c + \&c.}$ donc, mettant dans cette expression les valeurs de a, b, c &c. que nous venons de trouver, la correction, dont il s' agit, deviendra

$$\frac{\alpha\, p + \beta\, q + \gamma\, r + \&c.}{n}$$

c' est-à-dire, égale à l' erreur moyenne entre toutes les erreurs particulières que les n vérifications ont données.

Corollaire.

20. Si on vouloit tenir compte aussi, au moins d' une manière approchée, des erreurs intermédiaires auxquelles l' instrument pourroit être sujet, il n' y auroit qu' à prendre, dans une ligne droite indéfinie, des abscisses proportionelles aux erreurs trouvées p, q, r &c. comme dans l' art. 17., & y ayant appliqué des ordonnées proportionelles aux quantités a, b, c &c. on feroit passer par les extrémités p, q, r &c. une ligne parabolique; on chercheroit ensuite le centre de gravité de l' aire de toute la courbe, & la perpendiculaire, abaissée de ce centre sur l' axe, y couperoit une abscisse qui feroit la correction de l' instrument.

On voit par là comment on peut connoître *a posteriori* la loi de la facilité de chacune des erreurs auxquelles un instrument peut-être sujet.

Rémarque I.

21. On a trouvé ci-dessus que la plus grande probabilité a lieu lorsque $a = \frac{s\,\alpha}{n}$, $b = \frac{s\,\beta}{n}$, $c = \frac{s\,\gamma}{n}$ &c. de sorte que les valeurs de a, b, c &c. sont les plus probables qu' on puisse supposer ; si on vouloit savoir de plus quelle est la probabilité que ces mêmes valeurs ne s' ecarteront pas de la vérité d' une quantité quelconque $\pm \frac{r\,s}{n}$, il n' y auroit qu' à mettre dans l' expression générale de la probabilité $\frac{N a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots\ldots}{s^{n}}$ (prob. préc.) au lieu de a, b, c &c. les quantités $\frac{s\,(\alpha + x)}{n}$, $\frac{s\,(\beta + y)}{n}$, $\frac{s(\gamma + z)}{n}$ &c. & faisant successivement x, y, z &c. $= \pm 1, \pm 2, \pm 3$ &c. $\pm r$, ensorte, cependant, que l'on ait toujours $x + y + z +$ &c. $= o$, à cause que $a + b + c +$ &c. $= s$ & $\alpha + \beta + \gamma +$ &c. $= n$ (hyp.) on aura autant de probabilités particulières, dont la somme sera la probabilité cherchée.

Soit P la probabilité que l' on ait $a = \frac{s\alpha}{n}$, $b = \frac{s\beta}{n}$, $c = \frac{s\,\gamma}{n}$ &c. mettant ces valeurs dans l' expression précédente on aura

$$P = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n}{n^{n}} \times \frac{\alpha^{\alpha}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \alpha} \times \frac{\beta^{\beta}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \beta} \times \ldots$$

Soit de plus Q la probabilité que l' on ait $a = \frac{s\,(\alpha + x)}{n}$, $b = \frac{s\,(\beta + y)}{n}$ &c. on aura la valeur de Q en mettant ces valeurs dans la même expression, & il est facile de voir qu' on aura

$$Q = P\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(1 + \frac{y}{\beta}\right)^{\beta}\left(1 + \frac{z}{\gamma}\right)^{\gamma}\ldots\ldots$$

Donc, ſi on fait en général

$$V = \left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(1 + \frac{y}{\beta}\right)^{\beta}\left(1 + \frac{z}{\gamma}\right)^{\gamma}\ldots;$$

& que $\int v$ dénote la ſomme de toutes les valeurs particulières de v, en faiſant varier x, y, z &c. depuis o juſqu' à $\pm r$, & ayant ſoin que l' on ait toujours $x + y + z +$ &c. $= o$, la probabilité cherchée ſera égale à $P \int v$.

Comme il n' eſt pas facile de trouver l' intégrale $\int v$, ſurtout lorſqu' il y a plus de deux variables, on pourra ſe contenter de l' avoir d' une manière approchée; pour cela il n' y aura qu' à prendre une valeur moyenne de v & la multiplier par le nombre de toutes les valeurs particulières de v qui doivent entrer dans l'intégrale $\int v$; & la difficulté ne conſiſtera qu' à trouver ce nombre. Or ſi on déſigne par m le nombre des quantités α, β, γ &c. il eſt facile de concevoir que le nombre, dont-il s' agit, ne ſera autre choſe que le coefficient de u^{o}, c' eſt-à-dire, le terme tout connu de la ſérie qui repréſente la puiſſance m du polinome $u^{-r} + u^{-r+1} +$ &c. $+ u^{-1} + 1 + u +$ &c. $+ u^{r-1} + u^{r}$. Qu' on dénote ce terme par T, & l' on aura, comme nous le démontrerons plus bas

$$T = \frac{(mr+1)(mr+2)(mr+3)\ldots\ldots(mr+m-1)}{1\;.\;2\;.\;3\;.\ldots\ldots m-1}$$

$$- m\frac{((m-2)r)\;((m-2)r+1)\;((m-2)r+2)\ldots((m-2)r+m-2)}{1\;.\;2\;.\;3\;.\ldots\ldots m-1}$$

$$+ \frac{m(m-1)}{2}\frac{((m-4)r-1)\;((m-4)r)\;((m-4)r+1)\ldots\ldots((m-4)r+m-3)}{1\;.\;2\;.\;3\;.\ldots\ldots m-1}$$

$-$ &c.

en continuant cette ſérie, ſeulement juſqu' à ce que quelqu' un des facteurs $mr+1$, $(m-2)r$, $(m-4)r-1$ &c. devienne négatif.

Donc

Donc, si W est la valeur moyenne de V, on aura, pour la valeur approchée de $\int v$, la quantité $T W$; & la probabilité cherchée sera à peu près égale à $P T W$

Si, au lieu de prendre pour W la valeur moyenne de V, on prend la plus petite, il est clair que $T W$ sera nécessairement moindre que la véritable valeur de $\int v$; & par conséquent la probabilité cherchée sera nécessairement plus grande que $P T W$; ainsi on pourra parier avec avantage $P T W$ contre $1 - P T W$ qu' en faisant $\frac{a}{s} = \frac{\alpha}{n}$, $\frac{b}{s} = \frac{\beta}{n}$, $\frac{c}{s} = \frac{\gamma}{n}$ &c. on ne se trompera pas d' une quantité plus grande que $\frac{r}{n}$ tant en plus qu'en moins.

Remarque II.

21. Supposons que n soit un nombre très-grand, & que, par conséquent, les nombres α, β, γ &c. dont la somme est $= n$ soient aussi très-grands; pour trouver dans ce cas les valeurs de P & de V on remarquera 1.° que lorsque x est un très-grand nombre on a, à très-peu près,

$$l\,1 + l\,2 + l\,3 + \&c. + l\,u = \frac{1}{2}\,l\,\pi + \left(u + \frac{1}{2}\right) l\,u - u$$

π étant le rapport de la périphérie du cercle au rayon; d' où il suit que l' on aura

$$l\,\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots u}{u^u} = \frac{1}{2}\,l\,\pi + \frac{1}{2}\,l\,u - u,$$

& par conséquent

$$\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots u}{u^u} = \frac{\sqrt{(\pi\,u)}}{e^u}$$

donc, à cause de $\alpha + \beta + \gamma + \&c. = n$, on aura

$$P = \sqrt{\left(\frac{\pi^n}{(\pi\alpha)\,(\pi\beta)\,(\pi\gamma)\ldots}\right)}$$

2.° Si on prend le logarithme de V on aura

$$lV = \alpha l\left(1+\frac{x}{\alpha}\right) + \beta l\left(1+\frac{y}{\beta}\right) + \gamma l\left(1+\frac{z}{\gamma}\right) + \&c.$$

mais $l\left(1+\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{2\alpha^2} + \&c.$

donc, à cauſe de $x+y+z+\&c. = o$, on aura, à très peu près,

$$lV = -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}+\frac{z^2}{\gamma}+\&c.\right)$$

& de là

$$V = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}+\frac{z^2}{\gamma}+\&c.\right)}.$$

Soit maintenant $x = \xi\sqrt{n}$, $y = \Psi\sqrt{n}$ $z = \zeta\sqrt{n}$ &c., & $\frac{\alpha}{n} = A$, $\frac{\beta}{n} = B$, $\frac{\gamma}{n} = C$ &c. on aura $\xi+\Psi+\zeta+\&c. = o$ & $A+B+C+\&c. = 1$; donc,

$$P = \frac{1}{(\pi n)^{\frac{m-1}{2}}\sqrt{(ABC\ldots)}} \;\&$$

$$V = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2}{A}+\frac{\Psi^2}{B}+\frac{\zeta^2}{C}+\&c.\right)}$$

Or, comme l'incrément où la différence des quantités x, y, z &c. eſt $= 1$, la différence des variables ξ, Ψ, ζ &c. ſera $= \frac{1}{\sqrt{n}}$ &, par conſéquent, infiniment petite; de ſorte que, ſi on appelle cette différence $d\theta$, on aura

$$P = \frac{d\theta^{m-1}}{\sqrt{\left(\pi^{m-1} ABC\ldots\right)}}$$

Donc

$$Pv = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2}{A}+\frac{\Psi^2}{B}+\frac{\zeta^2}{C}+\&c.\right)} d\theta^{m-1}}{\sqrt{\left(\pi^{m-1} A.A.C\ldots\right)}}$$

Donc, si on intègre la différentielle

$$\frac{d\,\theta^{m-1}}{e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2}{A}+\frac{\Psi^2}{B}+\frac{\zeta^2}{C}+\&c.\right)}}$$

$m-1$ fois, en mettant d'abord à la place de ξ sa valeur $-\Psi-\zeta-$ &c. & faisant varier ensuite successivement les variables Ψ, ζ &c. de la même différentielle $d\,\theta$, & qu'on complette l'intégrale, ensorte que les valeurs de ξ, Ψ, ζ &c. s'étendent depuis $-\rho$ jusqu'à ρ (en faisant $r=\rho\sqrt{n}$) on aura, en nommant cette intégrale R, la quantité

$$\frac{R}{\sqrt{(\pi^{m-1}\,A\,B\,C\ldots)}}$$

pour la probabilité que les valeurs de a, b, c &c. seront exactes à $\frac{\rho\,r}{\sqrt{n}}$ prés.

Soit par exemple $m=2$, ensorte que l'on n'ait trouvé que deux erreurs différentes, dont l'une ait été répétée α fois, & l'autre β fois dans un nombre très-grand n de vérifications de l'instrument; en ce cas il n'y aura qu'une seule intégration à faire, & la différentielle à intégrer sera, en mettant $-\Psi$ à la place de ξ, & faisant $d\,\theta=d\,x$,

$$\frac{d\,x}{e^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)\Psi^2}}$$

laquelle n'est intégrable par aucune des méthodes connues, à moins qu'on ne réduise en série la quantité exponentielle $e^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)\Psi^2}$. De cette manière on aura la différentielle

$$d\,\Psi\left(1-K\,\Psi^2+\frac{K^2\,\Psi^4}{2}-\frac{K^3\,\Psi^6}{2\,.\,3}+\&c.\right)$$

en faisant, pour abréger, $K=\frac{A+B}{2\,A\,B}$;

de ſorte que l' intégrale ſera

$$\Psi - \frac{K\Psi^3}{3} + \frac{K^2\Psi^5}{2 \cdot 5} - \frac{K^3\Psi^7}{2 \cdot 3 \cdot 7} + \&c.$$

Donc

$$R = 2\left(\rho - \frac{K\rho^3}{3} + \frac{K^2\rho^5}{2 \cdot 5} - \frac{K^3\rho^7}{2 \cdot 3 \cdot 7} + \&c.\right)$$

Donc $\frac{R}{\sqrt{(\pi A B)}}$ exprimera la probabilité que les valeurs de a, & b ſoient renfermées entre ces limites $s\left(A \pm \frac{\rho}{\sqrt{n}}\right)$ & $s\left(B \pm \frac{\rho}{\sqrt{n}}\right)$, c' eſt-à-dire, que les facilités des erreurs qui ſe ſont trouvées répétées α, & β fois, leſquelles ſont proportionelles à $\frac{a}{s}$, & $\frac{b}{s}$, ne s' écartent pas des quantités A, & B données par les obſervations, d' une quantité plus grande que $\frac{\rho}{\sqrt{n}}$.

Si on fait, pour plus de ſimplicité, $\rho = \mu \sqrt{A B}$, on aura, à cauſe de $A + B = 1$, $K = \frac{\mu^2}{2\rho^2}$, & la probabilité, dont il s' agit, ſera exprimée de cette manière

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\mu - \frac{\mu^3}{2 \cdot 3} + \frac{\mu^5}{2.4.5} - \frac{\mu^7}{2.4.6.7} + \&c.\right)$$

Donc, ſi on ſuppoſe $\mu = 1$, on aura la ſérie $1 - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.4.5} - \&c.$ dont la ſomme eſt à très-peu-près $0,\ 855624$; de ſorte que la probabilité cherchée ſera $\frac{1,\ 611248}{\sqrt{\pi}} = 0,\ 682688$ à peu près.

Ainſi on pourra, dans ce cas, parier avec avantage que, en ſuppoſant les facilités des erreurs reſpectivement égales à A & B, on ne ſe trompera pas de la quantité $\mu\sqrt{\left(\frac{A\ B}{n}\right)}$ qui, à cauſe de n très-grand, eſt néceſſairement infiniment petite.

Il feroit beaucoup plus difficile de trouver la valeur de R fi les variables ξ, Ψ, ζ &c étoient plus de deux, furtout à caufe que l' intégration doit être telle, qu' elle n' embraffe que les valeurs de ces mêmes variables qui font comprifes entre les limites $-\rho$ & $+\rho$; mais on pourra, dans ces cas, fe fervir de l' approximation que nous avons donnée dans l' art. préc.

Pour cela on remarquera, que puifque nous avons fait $r = \rho \sqrt{n}$, & que n eft fuppofé fort grand, le nombre r devra être fort grand auffi; de forte qu' on aura, à très-peu près,

$$T = \frac{r^{m-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m-1} \Big(m^{m-1} - m\,(m-2)^{m-1} + \frac{m\,(m-1)}{2}\,(m-4)^{m-1} - \&c. \Big)$$

en continuant cette férie jufqu' à ce que quelqu' un des nombres $m-2$, $m-4$ &c. devienne négatif; donc on aura

$$PT = \left(\frac{\rho}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1} \times \frac{m^{m-1} - m(m-2)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}(m-4)^{m-1} - \&c.}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m-1 \cdot \sqrt{(ABC\ldots)}}$$

& il n' y aura plus qu' à multiplier cette quantité par W, c' eft-à dire, par la valeur moyenne, ou, fi l' on veut, par la plus petite valeur de V. Or, comme on a

$$V = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2}{A} + \frac{\Psi^2}{B} + \frac{\zeta^2}{C} + \&c.\right)}}$$

il eft clair que la plus petite valeur de V fera celle où la quantité $\frac{\xi^2}{A} + \frac{\Psi^2}{B} + \frac{\zeta^2}{C} +$ &c. fera la plus grande; & il eft facile de voir que cela arrivera en prenant $\xi = \rho$ $\Psi = -\rho$, $\zeta = o$ &c. à caufe de $\xi + \Psi + \zeta = o$, & fuppofant que A, & B foient les plus petites de toutes les quantités A, B, C &c. ainfi on aura $W = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)\rho^2}}$

Donc, faisant, pour abréger,

$$M = \frac{m^{m-1} - m(m-2)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}(m-4)^{m-1} - \&c.}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots m-1}$$

on aura la quantité

$$M \left(\frac{\rho}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1} \times \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)\rho^2}}{\sqrt{\left(A\ B\ C \ldots\right)}}$$

laquelle sera nécessairement moindre que la probabilité cherchée ; de sorte qu' en nommant H cette quantité, on pourra toujours parier avec avantage H contre $1 - H$ qu' en supposant les facilités des erreurs égales, respectivement à A, B, C &c. on ne se trompera pas de la quantité très-petite $\frac{\rho}{\sqrt{n}}$.

Lemme I.

23. Soit X une fonction rationelle & sans diviseur de x, on demande le coefficient de la puissance x^μ dans la série résultante du développement de la fraction $\frac{X}{(a-x)^n}$.

On a, comme l' on sait,

$$\frac{1}{(a-x)^n} = \frac{1}{a^n} + \frac{n\,x}{a^{n+1}} + \frac{n\,(n+1)\,x^2}{2\;a^{n+2}} + \&c.$$

$$= \frac{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n-1}{a^n} + \frac{2 \cdot 3 \ldots n x}{a^{n+1}} + \frac{3 \cdot 4 \ldots n+1 \cdot x^2}{a^{n+2}} + \&c.}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots n-1};$$

donc, si on ordonne la quantité X par rapport aux puissances de x, en commençant par la plus haute, de manière que l'on ait en général $X = Ax^\alpha + Bx^{\alpha-1} + Cx^{\alpha-2} + \&c.$ $+ M x^\mu + N x^{\mu-1} + \&c.$

& qu'on multiplie cette férie par celle qui exprime la valeur de $\frac{1}{(a-x)^n}$, il eft facile de voir que le terme qui contiendra la puiffance x^μ fera

$$\frac{\frac{1.2.3\ldots n-1}{a^n}M+\frac{2.3\ldots n}{a^{n+1}}N+\frac{3.4\ldots n+1}{a^{n+2}}P+\&c.}{1.2.3\ldots\ldots n-1}x^\mu$$

de forte que le coefficient cherché fera repréfenté par la férie

$$\frac{\frac{1.2.3\ldots n-1}{a^n}M+\frac{2.3\ldots n}{a^{n+1}}N+\frac{3.4\ldots n+1}{a^{n+2}}P+\&c.}{1.2.3\ldots\ldots n-1}$$

Dénotons par X' la fomme de tous les termes de la valeur de X où les puiffances de x ne font pas plus hautes que x^μ, enforte que l'on ait $X'=Mx^\mu+Nx^{\mu-1}+Px^{\mu-2}+\&c.$; & divifant par $x^{\mu+1}$ on aura

$$\frac{X'}{x^{\mu+1}}=\frac{M}{x}+\frac{N}{x^2}+\frac{P}{x^3}+\&c.$$

donc, différentiant $n-1$ fois, & faifant enfuite $x=a$, on aura

$$\pm\frac{d.^{n-1}\left(\frac{X'}{x^{\mu+1}}\right)}{dx^{n-1}}=\frac{1.2.3\ldots n-1}{a^n}M+\frac{2.3\ldots n}{a^{n+1}}N+\&c.$$

le figne fupérieur étant pour le cas où n eft impair, & l'inférieur pour celui où n eft pair.

Donc, le coefficient cherché de la puiffance x^μ fera égal à ce que devient la quantité $\frac{d^{n-1}.\left(\frac{X'}{x^{\mu+1}}\right)}{1.2.3\ldots n-1\,(-dx)^{n-1}}$ lorfqu'on y fait $x=a$.

Remarque.

24. Si on divise la quantité X par $x^{\mu+1}$, & qu'on en rejette ensuite tous les termes où il y aura des puissances positives de x, il est visible qu'on aura la valeur de $\frac{X'}{x^{\mu+1}}$; donc, à la place de la quantité X' on peut prendre la quantité même X, en ayant soin de rejetter les termes dont nous venons de parler; de cette manière on aura, pour l'expression du coefficient cherché de x^{μ}, la quantité $\frac{d^{n-1}\left(\frac{X}{x^{\mu+1}}\right)}{1.2.3\ldots n-1(-dx)^{n-1}}$ en réjettant dans cette quantité, avant, ou après les différentiations, toutes les puissances positives de x, & faisant ensuite $x = a$.

Corollaire I.

25. Supposons qu'on demande le coefficient de x^{μ} dans la série $x^{-\alpha} \ldots\ldots + x^{-2} + x^{-1} + x^{0} + x^{1} + x^{2} + \ldots\ldots x^{\beta}$ élevée à la puissance n.

Suivant les règles ordinaires de la sommation des progressions géometriques on trouve que la somme de cette série est représentée par

$$\frac{x^{-\alpha}\,(1 - x^{\alpha+\beta+1})}{1 - x}$$

de sorte que la puissance n^{eme} de la même série sera égale à

$$\frac{x^{-n\alpha}\,(1 - x^{\alpha+\beta+1})^{n}}{(1 - x)^{n}}.$$

Comparant donc cette formule avec celle du problême précédent, on aura

$$X = x^{-n\alpha}\,(1 - x^{\alpha+\beta+1})^{n} =$$

$$x^{-n\alpha} - n\,x^{-(n-1)\alpha+\beta+1} + \frac{n(n-1)}{2}\,x^{-(n-2)\alpha+2(\beta+1)}$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\,x^{-(n-3)\alpha+3(\beta+1)} + \&c.$$

donc

donc, divisant par $x^{\mu+1}$ & faisant pour abréger $n\alpha+\mu=\pi$, $\alpha+\beta+1=\rho$ on aura

$$\frac{X}{x^{\mu+1}}=x^{-(\pi+1)}-n\,x^{-(\pi+1-\rho)}+\frac{n(n-1)}{2}\,x^{-(\pi+1-2\rho)}$$
$$-\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{2\,.\,3}\,x^{-(\pi+1-3\,\rho)}+\&c.$$

& par conséquent en différentiant $n-1$ fois,

$$\frac{d^{\,n-1}\left(\frac{X}{x^{\mu+1}}\right)}{(-d\,x)^{n-1}}=(\pi+1)\,(\pi+2)\ldots\ldots(\pi+n-1)\,x^{-(\pi+n)}$$
$$-n\,(\pi+1-\rho)\,(\pi+2-\rho)\ldots\ldots(\pi+n-1-\rho)x^{-(\pi+n-\rho)}$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}(\pi+1-2\rho)(\pi+2-2\rho)\ldots\ldots(\pi+n-1-2\rho)\,x^{-(\pi+n-2\rho)}$$
$$-\&c.$$

On rejettera donc de cette série les termes où les exposans de x se trouveront positifs, c'est-à-dire, que si s est le nombre entier, qui est égal ou immédiatement plus grand que $\frac{\pi+n}{\rho}$, on continuera la série seulement jusqu' au terme s^{eme}; ou bien il suffira de la continuer jusqu' à ce que quelqu'un des premiers facteurs $\pi+1$, $\pi+1-\rho$ &c. devienne négatif; ensuite on fera $x=1$ & on divisera le tout par $1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots n$; on aura ainsi la valeur du coefficient cherché, la quelle sera par conséquent

$$\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n-1}\Big((\pi+1)\;(\pi+2)\ldots\ldots(\pi+n-1)$$
$$-n\,(\pi+1-\rho)\,(\pi+2-\rho)\ldots\ldots(\pi+n-1-\rho)$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}(\pi+1-2\,\rho)\,(\pi+2-2\rho)\ldots\ldots(\pi+n-1-2\,\rho)$$
$$-\frac{n(n-1)\,(n-2)}{2\,.\,3}(\pi+1-3\rho)\,(\pi+2-3\,\rho)\ldots\ldots(\pi+n-1-3\rho)$$
$$+\&c.\Big)$$

De là on tire la solution du problême suivant

Problême VII.

26. On a plusieurs observations dans chacune desquelles on suppose qu'on ait pu se tromper également d'une quelconque de ces quantités $-\alpha, \ldots\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\ldots \beta$; on demande quelle est la probabilité que l'erreur du résultat moyen de n observations sera $\frac{\mu}{n}$, ou qu'elle sera renfermée entre ces limites $-\frac{p}{n}$ & $\frac{+q}{n}$.

Pour trouver la probabilité que le résultat moyen soit $\frac{\mu}{n}$, il faut chercher le coefficient de la puissance x^{μ} du polinome $x^{-\alpha} \ldots\ldots + x^{-2} + x^{-1} + x^{0} + x^{1} + x^{2} + \ldots\ldots x^{\beta}$ élevé à la puissance n, & diviser ensuite ce coefficient par la valeur du même polinome élevé à la puissance n, qui répond à $x = 1$; c'est-à-dire, par $(\alpha + \beta + 1)^{n}$ c'est ce qui suit évidemment de ce que nous avons démontré dans les prob. préc.

Donc, par le corollaire précédent, on trouvera que la probabilité cherchée sera, en faisant $\pi = n\alpha + \mu, \rho = \alpha + \beta + 1$,

$$\frac{1}{1.2.3..n-1\,\rho^{n}}\Big((\pi+1)(\pi+2)\ldots\ldots(\pi+n-1)$$
$$-n(\pi+1-\rho)(\pi+2-\rho)\ldots\ldots(\pi+n-1-\rho)$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}(\pi+1-2\rho)(\pi+2-2\rho)\ldots(\pi+n-1-2\rho)$$
$$-\ \&c.\Big)$$

en continuant cette série jusqu'à ce que quelqu'un des facteurs $\pi + 1$, $\pi + 1 - \rho$ &c. devienne négatif.

Telle est l'expression générale de la probabilité que l'erreur moyenne de n observations soit $= \frac{\mu}{n}$; ainsi pour avoir la probabilité que l'erreur soit contenue entre les

limites $\frac{-p}{n}$ & $\frac{+q}{n}$ il n' y aura qu' à faire varier μ dans la quantité précédente, & prendre la ſomme de toutes les quantités particulières qui répondront à
$\mu = -p, \ldots\ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\ldots q.$

Or, puiſque la quantité μ n' entre que dans la valeur de π, il n'y aura donc que cette quantité de variable; de ſorte que la difficulté ſe réduira à ſommer des ſuites dont le terme général ſera de cette forme $(s+1)\ (s+2)\ (s+3) \ldots\ldots (s+k)$
Pour cela, ſoit la ſomme de cette ſérie repréſentée par
$u\ (s+1)\ (s+2)\ \ldots\ldots\ (s+k)$
u étant une fonction inconnue de s, & mettant $s-1$ à la place de s, & u' à la place de u, on aura
$u'\ s\ (s+1)\ (s+2) \ldots\ldots (s+K-1)$
quantité, qui étant retranchée de la précédente, on aura la différence
$(u\ (s+K) - u'\ s)\ (s+1)\ (s+2) \ldots\ldots (s+K-1)$
mais il faut que cette différence ſoit égale au terme général de la ſérie dont on cherche la ſomme, donc on aura l' équation
$u\ (s+K) - u'\ s = s+K$
à laquelle on ſatisfera en faiſant $u = \frac{s+K+1}{K+1}$; de ſorte que la ſomme générale de la ſérie dont le terme général eſt $(s+1)\ (s+2) \ldots\ldots (s+K)$ ſera repréſentée par $\frac{(s+1)\ (s+2) \ldots\ldots (s+K)\ (s+K+1)}{K+1}$
& par conſéquent la ſomme de tous les termes compris entre ces deux-ci
$(s'+1)\ (s'+2) \ldots\ldots (s'+K)$ & $(s''+1)\ (s''+2) \ldots\ldots (s''+K)$
ſera égale à
$$\frac{s''(s''+1)\ (s''+2)\ \ldots\ (s''+K) - (s+1)\ (s'+2) \ldots\ldots (s'+K+1)}{K+1}$$

Appliquant donc ceci à la formule trouvée plus haut, on aura pour la probabilité que l' erreur moyenne tombe entre $\frac{-p}{n}$ & $\frac{q}{n}$ l' expreſſion ſuivante, dans laquelle j' ai fait pour abréger $n\alpha - p = \delta$ & $n\alpha + q = \gamma$,

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \rho^n} \Big(\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1) - (\delta+1)(\delta+2)\ldots(\delta+n)$$
$$- n((\gamma-\rho)(\gamma-\rho+1)\ldots(\gamma-\rho+n-1) - (\delta-\rho+1)(\delta-\rho+2)\ldots(\delta-\rho+n))$$
$$+ \frac{n(n-1)}{2}((\gamma-2\rho)(\gamma-2\rho+1)\ldots(\gamma-2\rho+n-1) - (\delta-2\rho+1)(\delta-2\rho+2)\ldots(\delta-2\rho+n))$$
$$- \&c. \Big)$$

Cette ſérie doit être continuée jusqu' à ce que quelqu' un des facteurs $\gamma - \rho$, $\gamma - 2\rho$ &c. devienne négatif; & quant aux autres facteurs $\delta - \rho + 1$, $\delta - 2\rho + 1$ &c. ſi quelqu' un d' entr' eux ſe trouve négatif, alors il faudra augmenter le nombre δ d' autant d' unité qu' il faudra pour le rendre poſitif; cela ſuit évidemment de ce que la ſérie, dont la précédente eſt la ſomme, ne doit être continuée que jusqu' à ce que quelqu' un des premiers facteurs $\pi + 1 - \rho$, $\pi + 1 - 2\rho$ &c. devienne négatif, comme nous l' avons vu dans l' art. préc.

Corollaire.

27. Suppoſons que les nombres α, & β deviennent infinis, auſſi bien que p & q, mais de façon qu' ils aient entr' eux des rapports finis; & ſoit $\frac{\beta}{\alpha} = l$, $\frac{p}{\alpha} = r$, $\frac{q}{\alpha} = s$, enſorte que l' on ait $\beta = \alpha l$, $p = \alpha r$, $q = \alpha s$, l, r, s étant des nombres finis; dans ce cas on aura
$\rho = \alpha + \beta = (1 + l)\alpha$, $\delta = n\alpha - p = (n - r)\alpha$
$\gamma = n\alpha + q = (n + s)\alpha$; de ſorte qu' en ſubſtituant ces valeurs dans la formule précédente, & négligeant ce qu'on

doit négliger à cause de $\alpha = \infty$, on aura celle-ci ou $f = 1 + l$,

$$\frac{1}{1.2.3\ldots nf^n}\left((n+s)^n - n\,(n+s-f)^n + \frac{n(n-1)}{2}(n+s-2f)^n - \&c.\right.$$
$$\left. -(n-r)^n + n\,(n-r-f)^n - \frac{n(n-1)}{2}(n-r-2f)^n + \&c.\right)$$

chacune de ces deux séries devant être continuée seulement jusqu'à ce que quelqu'une des quantités $n+s-f$, $n+s-2f$ &c. & $n-r-f$, $n-r-2f$ &c. devienne négative.

Le cas de ce corollaire a lieu lorsqu'on suppose que chaque observation est également sujette à toutes les erreurs possibles comprises entre des limites données; car si on prend la plus grande erreur négative pour l'unité, & qu'on désigne la plus grande erreur positive par l, la formule précédente dénotera la probabilité que l'erreur du résultat moyen de n observation soit renfermée entre ces deux limites $-\frac{r}{n}$ & $+\frac{s}{n}$.

Au reste nous donnerons plus bas une méthode beaucoup plus simple pour resoudre ces sortes de questions.

Problême VIII.

28. Supposant que les erreurs qu'on peut commettre dans chaque observation soient $-\omega \ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots \omega$, & que le nombre des cas qui répondent à chacune de ces erreurs soit respectivement proportionel à $1, 2, 3 \ldots \alpha+1, \ldots 3, 2, 1.$ on demande quelle est la probabilité que l'erreur du résultat moyen de m observations soit comprise entre les limites $\frac{-p}{m}$ & $\frac{q}{m}$.

Commençons par chercher la probabilité que l'erreur moyenne soit $= \frac{\mu}{m}$; cette probabilité sera égale au coefficient de la puissance x^μ du polinome

$$x^{-\omega} + 2x^{-\omega+1} \ldots + \omega x^{-1} + (\omega+1)x^0 + \omega x' + \ldots 2x^{\omega-1} + x^\omega$$

élevé à la puiſſance m, ce coefficient étant enſuite diviſé par la valeur du même polinome élevé à la puiſſance n, qui répond à $x = 1$

Or on a $1 + 2x + \dots (\omega + 1) x^{\omega} + \dots 2 x^{2\omega - 1} + x^{2\omega} = (1 + x + \dots x^{\omega})^2 = \left(\frac{1 - x^{\omega+1}}{1 - x}\right)^2$; donc le polinome dont-il s' agit ſera égal à $x^{-\omega}\left(\frac{1 - x^{\omega+1}}{1 - x}\right)^2$, & par conſéquent la puiſſance n de ce polinome ſera repréſentée par

$$\frac{x^{-m\omega}(1 - x^{\omega+1})^{2m}}{(1 - x)^{2m}}$$

Cette formule étant comparée à celle de l' art. 23., on aura $n = 2m$, $n\alpha = m\omega$, & $\alpha + \beta + 1 = \omega + 1$; d' où l' on tire $n = 2m$, $\alpha = \frac{m\omega}{n} = \frac{\omega}{2}$, & $\beta = \frac{\omega}{2}$; donc (prob. préc.) la probabilité cherchée ſera

$$\frac{1}{1.2.3 \dots 2m\rho^{2m}}\Big((\pi + 1)(\pi + 2) \dots (\pi + 2m - 1)$$
$$- 2m(\pi + 1 - \rho)(\pi + 2 - \rho) \dots (\pi + 2m - 1 - \rho)$$
$$+ \frac{2m(2m-1)}{2}(\pi + 1 - 2\rho)(\pi + 2 - 2\rho) \dots (\pi + 2m - 1 - 2\rho)$$
$$- \&c.\Big)$$

en ſuppoſant $\pi = m\omega + \mu$, & $\rho = \omega + 1$ & continuant la ſérie juſqu' à ce que quelqu'un des facteurs $\pi + 1 - \rho$, $\pi + 1 - 2\rho$ &c. devienne négatif.

De là on trouvera, comme dans le probl. précéd., que la probabilité que l' erreur moyenne ſe trouve entre les limites $\frac{-p}{n}$ & $\frac{q}{n}$ ſera exprimée par

$$\frac{1}{1.2.3 \dots 2m\rho^{2m}}\Big(\gamma(\gamma + 1) \dots (\gamma + 2m - 1) - (\delta + 1)(\delta + 2) \dots (\delta + 2m)$$
$$- 2m((\gamma - \rho)(\gamma + 1 - \rho) \dots (\gamma + 2m - 1 - \rho) - (\delta + 1 - \rho)(\delta + 2 - \rho) \dots (\delta + 2m - \rho))$$
$$+ \frac{2m(2m-1)}{2}((\gamma - 2\rho)(\gamma + 1 - 2\rho) \dots (\gamma + 2m - 1 - 2\rho) - (\delta + 1 - 2\rho)(\delta + 2 - 2\rho) \dots (\delta + 2m - 2\rho))$$
$$- \&c.\Big)$$

γ étant $= m\,\omega + q$, & $\delta = m\,\omega - p$. à l'égard de la continuation de ces deux séries il faudra suivre les règles prescrites plus haut (art. 24.)

Corollaire.

31. Supposons maintenant que les nombres ω p, & q deviennent infinis, mais ensorte que l'on ait $\frac{p}{\omega} = r$, $\frac{q}{\omega} = s$, r, & s étant des nombres finis, & la formule précédente deviendra (art. 25.)

$$\frac{(2m+s)^{2m} - 2m\,(2\,(m-1)+s)^{2m} + \frac{2m\,(2m-1)}{2}(2\,(m-2)+s)^{2m} - \&c.}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,2\,m\,.\,2^{2m}}$$

$$\frac{(2m-r)^{2m} - 2m\,(2\,(m-1)-r)^{2m} + \frac{2m\,(2m-1)}{2}(2(m-2)-r)^{2m} - \&c.}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,2\,m\,.\,2^{2m}}$$

ces deux séries étant continuées jusqu'à ce que quelqu'une des quantités qui sont élevées à la puissance $2\,n$ devienne négative.

Cette formule exprimera donc la probabilité que l'erreur moyenne de n observations soit comprise entre les limites $\frac{-r}{n}$ & $\frac{s}{n}$, dans l'hypothèse que chaque observation soit sujette à toutes les erreurs possibles contenues entre ces deux limites -1 & $+1$, & que la facilité de chaque erreur soit proportionelle à la différence qu'il y a entre cette erreur & la plus grande erreur possible dans le même sens; cette hypothèse est plus conforme à la nature que celle de l'art. 27.; la courbe des erreurs (art. 20.) seroit ici un triangle isocèle quelconque.

Scholie.

32. En général on pourra trouver, à l'aide du lemme précédent, la probabilité que l' erreur moyenne ſoit égale à une quantité donnée dans l' hypothèſe que les erreurs, auxquelles chaque obſervation eſt ſujette, forment une progreſſion arithmétique; & que les facilités de ces erreurs forment une progreſſion algèbrique quelconque, dont les différences d' un ordre quelconque deviennent nulles; car ſoit

$$A x^{-\alpha} + B x^{-\alpha+1} \ldots\ldots + P x^{-1} + Q x^{0} + R x^{1} + \ldots + V x^{\beta}$$

le polinome dont les expoſans de x repréſentent les erreurs, & les coefficiens, les facilités de ces erreurs; qu' on dénote par ΔA, $\Delta.^2 A$ &c. les différences premières, ſecondes &c. de la ſérie A, B, C &c. enſorte que $\Delta . A = B - A$, $\Delta.^2 A = C - 2 B + A$, &c., & qu' on dénote de même par $\Delta . V$, $\Delta.^2 V$ les différences de la ſérie V, X, Y &c. ſuppoſée continuée au delà de V, on aura, comme l' on ſait, pour la valeur du polinome propoſée, la ſérie

$$x^{-\alpha} \left(\frac{A - V x^{\alpha+\beta+1}}{1 - x} + x \frac{\Delta . A - \Delta V x^{\alpha+\beta+1}}{(1 - x)^2} + \text{\&c.} \right)$$

Or, ſi la ſérie A, B, C &c. V, X &c. eſt telle que ſes différences d' un ordre quelconque m par exemple deviennent nulles, on aura $\Delta .^m A = o$, & $\Delta .^m V = o$ & toutes les différences ultérieures ſeront auſſi zéro; de ſorte que l' expreſſion précédente deviendra finie quand même le polinome propoſé contiendroit un nombre infini de termes; de plus cette expreſſion pourra ſe réduire à cette forme $\frac{\Xi}{(1 - x)^m}$, Ξ étant une fonction rationelle & entière de x; de ſorte qu' en élévant cette quantité à une puiſſance quelconque, on aura toujours une expreſſion qui ſera dans le cas de celle du lemme.

Lemme

Lemme II.

33. On demande le coefficient de la puiſſance x^μ dans la ſérie qui réſultera du développement de la fraction $\frac{X}{(a-x)^m (b-x)^n}$, X étant, comme dans le lemme I. une fonction rationelle & ſans diviſeur, de x.

On ſait que la fraction $\frac{1}{(a-x)^m (b-x)^n}$ peut ſe décompoſer en différentes fractions telles que celles-ci

$$\frac{A}{(a-x)^m} + \frac{A'}{(a-x)^{m-1}} + \frac{A''}{(a-x)^{m-2}} + \&c. + \frac{A^{m-1}}{a-x}$$
$$+ \frac{B}{(b-x)^n} + \frac{B'}{(b-x)^{n-1}} + \frac{B''}{(b-x)^{n-2}} + \&c. + \frac{B^{n-1}}{b-x}$$

les coefficiens A, A', A'' &c. étant égaux à ce que deviennent les quantités $\frac{1}{(b-x)^n}$,

$$\frac{d.\frac{1}{(b-x)^n}}{-dx}, \quad \frac{d.^2\frac{1}{(b-x)^n}}{2\,dx^2}$$ &c. lorſque $x = a$, & les coefficiens B, B', B'' &c. étant égaux à ce que deviennent les quantités

$$\frac{1}{(a-x)^m}, \quad \frac{d.\frac{1}{(a-x)^m}}{-dx}, \quad \frac{d.^2\frac{1}{(a-x)^m}}{2\,dx^2} \; \&c.$$

lorſque $x = b$. Donc la fraction propoſée ſe changera dans ces deux ſuites de fractions

$$\frac{AX}{(a-x)^m} + \frac{A'X}{(a-x)^{m-1}} + \&c. + \frac{A^{m-1}X}{a-x}$$
$$+ \frac{BX}{(b-x)^n} + \frac{B'X}{(b-x)^{n-1}} + \&c. + \frac{B^{n-1}X}{b-x}.$$

Mais par le lemme premier le coefficient de la puiſſance x^μ dans la ſérie réſultante d' une fraction telle

que $\frac{X}{(a-x)^{m-s}}$ peut s' exprimer par

$$\frac{d.^{m-s-1}\left(\frac{X}{x^{\mu+1}}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,..\,m-s-1\;(-dx)^{m-s-1}};$$ en y faiſant après les différentiations, $x=a$;

Donc, en général, la fraction $\frac{A^s X}{(a-x)^{m-s}}$ donnera pour le coefficient de x^μ la quantité

$$\frac{d.^s\,\frac{1}{(b-x)^n}}{1\,.\,2\,.\,3\,...\,s\;(-dx)^s} \times \frac{d.^{m-s-1}\left(\frac{X}{x^{\mu+1}}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,...\,m-s-1\;(-dx)^{m-s-1}}$$

où il faut faire $x=a$. Donc, puiſque $d^{m-1}.\,y\,z = y\,d^{m-1}z + (m-1)\,dy\,d^{m-2}z + \frac{(m-1)(m-2)}{2}d^2y\,d^{m-3}z + \&c. + z\,d^{m-1}y$, il eſt facile de voir que les fractions

$$\frac{AX}{(a-x)^m} + \frac{A'X}{(a-x)^{m-1}} + \&c. + \frac{A^{m-1}X}{a-x},$$

priſes toutes enſemble, donneront pour le coefficient de x^μ la quantité

$$\frac{d.^{m-1}\left(\frac{X}{x^{\mu+1}\,(a-x)^n}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,...\,m-1\;(-dx)^{m-1}}$$

x étant fait $= a$.

De même les fractions

$$\frac{BX}{(a-x)^n} + \frac{B'X}{(b-x)^{n-1}} + \&c. + \frac{B^{n-1}X}{b-x}$$

donneront pour le coefficient de x^μ la quantité

$$\frac{d.^{n-1}\left(\frac{X}{x^{\mu+1}\,(a-x)^m}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,....\,n-1\;(-dx)^{n-1}}$$

x étant fait $= b$.

Donc, en réunissant ces deux quantités, on aura pour le coefficient de x^μ dans la série résultante de la fraction $\frac{X}{(a-x)^m\,(b-x)^n}$ l' expression

$$\frac{d.^{m-1}\left(\frac{X}{x^{\mu+1}\,(b-x)^n}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots m-1\;(-d\,x)^{m-1}}\;..\;(x=a)$$
$$+\frac{d.^{n-1}\left(\frac{X}{x^{\mu+1}\;(a-x)^m}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n-1\;(-d.x)^{n-1}}\;(x=b)$$

en ayant soin de rejetter dans la valeur de $\frac{X}{x^{\mu+1}}$ toutes les puissances positives de x.

Corollaire.

34. Il est facile de conclure de là que si on développoit en série la fraction

$$\frac{X}{(a-x)^m\;(b-x)^n\;(c-x)^p\ldots}$$

on auroit pour le coefficient de x^μ l' expression suivante

$$\frac{d.^{m-1}\left(\frac{X.}{x^{\mu+1}\;(b-x)^n\;(c-x)^p\ldots}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots m-1\;(-dx)^{m-1}}\;(x=a)$$
$$+\frac{d.^{n-1}\left(\frac{X}{x^{\mu+1}\;(a-x)^m\;(c-x)^p\ldots}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n-1\;(-dx)^{n-1}}\;(x=b)$$
$$+\frac{d.^{p-1}\left(\frac{X}{x^{\mu+1}\;(a-x)^m\,(b-x)^n\ldots}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots p-1\;(-dx)^{p-1}}\;(x=c)$$
$$+\;\&c.$$

en ne prenant dans la valeur de $\frac{X}{x^{\mu+1}}$ que les puissances négatives de x, & rejettant toutes les positives.

Remarque.

35. Par le moyen du lemme précédent on pourra donc déterminer aisément la probabilité que l'erreur moyenne, résultante de tant d'observations qu'on voudra, soit nulle ou égale à une quantité donnée, lorsque le polinome (art. 32.)

$A\,x^{-\alpha} + B\,x^{-\alpha+1} \ldots + P\,x^{-1} + Q\,x^{0} + R\,x^{1} \ldots + V\,x^{\beta}$

forme une série recurrente quelconque; car alors la somme de cette série pourra s'exprimer, comme l'on sait, par une fraction rationelle, telle que

$$\frac{\Xi}{(a-x)^{\lambda}\,(b-x)^{\pi}\,(c-x)^{\rho}\ldots}$$

Ξ étant une fonction rationelle & sans diviseur, de x; de sorte qu'en élévant cette quantité à une puissance quelconque, on aura toujours une expression qui pourra se rapporter à celles du lemme ci-dessus.

Au reste l'hypothèse la plus conforme à la nature est celle où l'on suppose que chaque observation soit sujette à toutes les erreurs comprises entre des limites données, ensorte que le nombre de toutes les erreurs possibles soit infini, comme dans les art. 27. & 31.; or pour trouver en ce cas la probabilité que l'erreur moyenne d'un nombre quelconque d'observations soit aussi renfermée entre des limites données, il n'est pas nécessaire de considérer d'abord un nombre fini d'erreurs, & de supposer ensuite que ce nombre devienne infini, comme nous l'avons pratiqué dans les art. cités; mais on peut y parvenir directement par une méthode beaucoup plus simple & plus générale, laquelle est fondée sur le lemme suivant.

Lemme III.

36. Si y dénote une fonction quelconque de x telle que $\frac{d^m y}{dx^m}$ soit une quantité constante, on aura

$$\int y\, a^x\, dx = a^x \left(\frac{y}{la} - \frac{dy}{dx\,(la)^2} + \frac{d^2 y}{dx^2\,(la)^3} - \&c. \pm \frac{d^m y}{dx^m\,(la)^{m+1}} \right) + const.$$

c'est ce qui est aisé à vérifier par la différentiation.

Corollaire I.

37. Si on fait $y = x^m$, m étant un nombre entier & positif, on aura donc

$$\int x^m a^x\, dx = a^x \left(\frac{x^m}{la} - \frac{m\, x^{m-1}}{(la)^2} + \frac{m\,(m-1)\, x^{m-2}}{(la)^3} - \&c. \pm \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots 2\,.\,1}{(la)^{m+1}} \right) + const.$$

Qu'on prenne l'intégrale $\int x^m a^x\, dx$ ensorte qu'elle soit nulle lorsque $x = o$, & l'on aura

$$\int x^m a^x\, dx = a^x \left(\frac{x^m}{la} - \frac{m\, x^{m-1}}{(la)^2} + \&c. - \frac{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,m}{(-la)^{m+1}} \right) + \frac{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,m}{(-la)^{m+1}}.$$

Or, si on suppose que a soit une fraction moindre que l'unité, ensorte que $\frac{1}{a}$ soit un nombre plus grand que l'unité, & qu'on fasse $x = \infty$, il est facile de voir que $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ sera une quantité infinie d'un ordre infiniment plus grand que x^m, & qu'aucune puissance finie de x;

donc $\frac{x^m}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$, ou bien $a^x x^m$ ſera nulle, &, à plus forte raiſon auſſi, toutes les autres quantités $a^x x^{m-1}$, $a^x x^{m-2}$ &c. ſeront nulles, de ſorte qu'on aura dans ces cas

$$\int x^m a^x dx = \frac{1 . 2 . 3 . . . . m}{(-l a)^{m+1}}.$$

D'où je conclus, que la quantité $\frac{1}{(-l a)^m}$ eſt égale à l'intégrale de $x^{m-1} a^x dx$ priſe depuis $x = o$ juſqu'à $x = \infty$, & diviſée par $1 . 2 . 3 . . . m - 1$; pourvu que a ſoit un nombre poſitif moindre que l'unité.

Si a étoit un nombre poſitif, plus grand que l'unité, il n'y auroit qu'à mettre $\frac{1}{a}$ à la place de x dans la formule précédente, & l'on en concluroit que la quantité $\frac{1}{(l a)^m}$ feroit égale à l'intégrale de $\frac{x^{m-1} dx}{a^x}$ priſe de même depuis $x = o$ juſqu'à $x = \infty$, & diviſée par $1 . 2 . 3 . . . m - 1$; on voit par là comment on peut réduire les puiſſances quelconques de $\frac{1}{l a}$ en des ſéries infinies qui procédent ſuivant les puiſſances de a.

Corollaire II.

38. Donc, ſi l'on a une fonction quelconque rationelle & ſans diviſeur de a telle que

$A = P a^p + Q a^{p-1} + R a^{p-2} +$ &c.

& qu'on demande le coefficient de la puiſſance a^{p-x} dans la fonction $\frac{A}{(l a)^m}$; il n'y aura qu'à mettre, à la place de $\frac{1}{(l a)^m}$, la ſomme des valeurs de $\frac{x^{m-1} dx}{a^x}$ depuis $x = o$

jusqu' à $x = \infty$, divisée par $1 . 2 . 3 \ldots m-1$ (corol. préc.), & rassemblant tours les termes où a se trouvera élevé à la puissance donnée, on aura pour le coefficient de cette puissance la sèrie

$$\frac{P x^{m-1} + Q (x-1)^{m-1} + R (x-2)^{m-2} + \&c.}{1 . 2 . 3 \ldots m-1} d x$$

laquelle ne devra être continuée que jusqu' à ce que quelqu' un des termes $x-1$, $x-2$ &c. devienne négatif; & comme ce coefficient ne dépend point de la valeur de a, il est clair que la formule que nous venons de trouver aura toujours lieu, soit que a soit plus grand ou moindre que l' unité.

Si au lieu de la fonction $\frac{A}{(l a)^m}$ on avoit celle-ci : $\frac{A}{(l a - \alpha)^m}$; comme $l a - \alpha = l \frac{a}{e^\alpha}$, il faudroit substituer à la place de $\frac{1}{(l a - \alpha)^m}$ la somme des valeurs de $\frac{e^{\alpha x} x^{m-1} dx}{a^x}$ depuis $x = o$ jusqu' à $x = \infty$, divisée par $1 . 2 . 3 . m-1$, & l' on auroit pour le coefficient de a^{p-x} la série

$$\frac{P e^{\alpha x} x^{m-1} + Q e^{\alpha(x-1)} (x-1)^{m-1} + R e^{\alpha(x-2)} (x-2) + \&c.}{1 . 2 . 3 \ldots . m-1} d x$$

Enfin, si on avoit la fonction

$$\frac{A}{(l a + \alpha)^m (l a - \beta)^n \ldots}$$

on décomposeroit d' abord, par les méthodes connues, la fraction

$$\frac{1}{(l a + \alpha)^m (l a - \beta)^n \ldots}$$ en celles-ci

$$\frac{F}{(l a - \alpha)^m} + \frac{F'}{(l a - \alpha)^{m-1}} + \&c. + \frac{F^{m-1}}{l a - \alpha}$$

$$+ \frac{G}{(l a - \beta)^n} + \frac{G'}{(l a - \beta)^{n-1}} + \&c. + \frac{G^{n-1}}{l a - \beta}$$

$+$ &c.

ensuite multipliant chacune de ces fractions par A, on auroit autant de fonctions de a, dans lesquelles on pourroit trouver le coefficient de la puissance a^x par la formule ci-dessus.

Remarque.

39. Par le moyen du lemme précédent on peut trouver l' intégrale de $\int y\, a^x\, dx$ lorsque $y = X\, e^{-\alpha x}$, X étant une fonction rationelle & sans diviseur de x, telle que sa différentielle d' un ordre quelconque soit constante; car pour cela il n' y aura qu' à mettre dans la formule du lemme, X à la place de y & $a\,e^{-\alpha}$ à la place de a; moyennant quoi on aura

$$\int \frac{X\, a^x}{e^{x\alpha}}\, dx = \frac{a^x}{e^{\alpha x}} \left(\frac{X}{l\, a - \alpha} - \frac{dX}{dx\,(l\, a - \alpha)^2} + \frac{d^2 X}{dx^2\,(l\, a - \alpha)^3} - \&c. \right) + const.$$

Et on trouvera de même l' intégrale de $y\, a^x\, dx$, lorsque y sera composée de différentes fonctions de même espèce que $\frac{X}{e^{\alpha x}}$.

D' où il s' ensuit que l' on pourra aussi trouver l' intégrale de $y\, a^x\, dx$ lorsque y sera de cette forme $X\, cos.\, \alpha\, x$, ou $X\, sin.\, \alpha\, x$, ou composée de plusieurs fonctions d' une forme semblable; car il n' y aura qu' à mettre à la place des *sinus* & *cosinus* les expressions exponentielles imaginaires qui leur sont équivalentes, & le calcul achevé on remettra à la place de ces expressions, les *sinus* ou *cosinus* qui y répondent.

Ce sont là les seuls cas où la formule $y\, a^x\, dx$ soit intégrable, au moins par les méthodes connues jusqu' ici; dans tous les autres cas l' intégration ne peut s' exécuter que par approximation.

Problême

Problême X.

40. On ſuppoſe que chaque obſervation ſoit ſujette à toutes les erreurs poſſibles compriſes entre ces deux limites p & $-q$, & que la facilité de chaque erreur, x c' eſt-à-dire, le nombre des cas où elle peut avoir lieu, diviſé par le nombre total des cas, ſoit repréſentée par une fonction quelconque de x déſignée par y; on demande la probabilité que l' erreur moyenne de n obſervations ſoit compriſe entre les limites r, & $-s$.

On commencera d' abord par chercher la probabilité que l' erreur moyenne ſoit z, & cette probabilité étant repréſentée par une fonction de z, il n' y aura qu' à en prendre l' intégrale depuis $z = r$ juſqu' à $z = s$; ce ſera la probabilité cherchée.

Maintenant pour avoir la probabilité que l' erreur moyenne de n obſervations ſoit z, il faudra conſidérer le polynome qui eſt repréſenté par l' intégrale de $y . a^x\, d x$, en ſuppoſant cette intégrale priſe de manière qu' elle s' étende depuis $x = p$ juſqu' à $x = -q$, l' on élèvera ce polynome à la puiſſance n, & l' on cherchera le coefficient de puiſſance z de a, par les règles données dans les coroll. du lemme préc.; ce coefficient, qui ſera une fonction de z exprimera la probabilité que l' erreur moyenne ſoit z, comme il eſt facile de le voir d' après ce qui a été démontré plus haut.

Exemple I.

41. Suppoſons d' abord que y ſoit une quantité conſtante $= K$, enſorte que toutes les erreurs ſoient également probables, & l' intégrale de $y\, a^x\, d x$ ſera $\frac{K a}{l a}$, de ſorte qu' en prenant cette intégrale depuis $x = p$ juſqu' à $x = -q$, on aura pour ſa valeur complette $\frac{K (a^p - a^{-q})}{l a}$; qu' on élève donc cette quantité à la puiſ-

ſance n, & l' on aura une quantité de la forme $\frac{A}{(l\,a)^n}$, où (faiſant $p + q = t$)

$$A = K^n \left(a^{pn} - n\,a^{pn-t} + \frac{n\,(n-1)}{2}\,a^{pn-2t} - \&c.\right)$$

Donc par le coroll. 2 du lemme (art. 38.) le coefficient de puiſſance a^{pn-x} ſera

$$\frac{K^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n-1}\left(x^{n-1} - n\,(x-t)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\,(x-2\,t)^{n-1} - \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{2 \cdot 3}\,(x-3\,t)^{n-1} + \&c.\right) d\,x$$

en ayant ſoin de ne continuer la ſérie que juſqu' à ce qu' on parvienne à des termes $x - m\,t$ qui ſoient négatifs. Faiſant donc $p\,n - x = z$, c'eſt-à dire, $x = p\,n - z$ on aura la probabilité que l' erreur moyenne de n obſervations ſoit z. On intégrera maintenant la formule précédente en y faiſant varier x, & on prendra l' intégrale, enſorte qu' elle ſoit nulle lorſque $x = p\,n - r$, & complette lorſque $x = p\,n + s$; on aura de cette manière la quantité

$$\frac{K^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}\Big((p\,n + s)^n - n\,(p\,n + s - t)^n + \frac{n\,(n-1)}{2}\,(p\,n + s - 2\,t)^n - \&c. - (p\,n - r)^n + n\,(p\,n - r - t)^n - \frac{n\,(n-1)}{2}\,(p\,n - r - 2\,t)^n + \&c.\Big)$$

laquelle exprimera la probabilité que l' erreur moyenne de n obſervations ſoit contenue entre les limites r & $-s$; au reſte cette formule revient à la même que celle de l'art. 27.

Exemple II.

42. On ſuppoſe que la quantité y ſoit $= K\,(p^2 - x^2)$, & que les deux limites des erreurs ſoient p & $-p$, il faudra intégrer la différentielle $K\,a^x\,(p^2 - x^2)\,d\,x$, & prendre l' intégrale enſorte qu' elle s' étende depuis $x = -p$

jusqu' à $x = p$. Or, puisque la seconde différentielle de $p^2 - x^2$ est constante, on aura par le lemme cette intégrale

$$K a^x \left(\frac{p^2 - x^2}{l a} + \frac{2 x}{(l a)^2} - \frac{2}{(l a)^3}\right)$$

laquelle étant complétée, comme on vient de le dire, donnera

$$\frac{2 K p (a^p + a^{-p})}{(l a)^2} - \frac{2 K (a^p - a^{-p})}{(l a)^3};$$

On élèvera donc cette quantité à la puissance n, & l'on aura

$$\frac{(2 K p)^n (a^p + a^{-p})^n}{(l a)^{2n}} - n \frac{(2 K)^n p^{n-1} (a^p + a^{-p})^{n-1} (a^p + a^{-p})}{(l a)^{2n+1}}$$
$$+ \frac{n (n-1)}{2} \cdot \frac{(2 K)^n p^{n-2} (a^p + a^{-p})^{n-2} (a^p - a^{-p})^2}{(l a)^{2n+2}}$$
$$- \&c.$$

on développera les puissances de $a^p + a^{-p}$ & de $a^p - a^{-p}$, & l'on cherchera ensuite par les règles de l'art. 38. le coefficient de la puissance a^z. Pour faciliter ces opérations nous supposerons

$$(a^p + a^{-p})^n = a^{pn} + P a^{pn-2p} + Q a^{pn-4p} + \&c.$$
$$(a^p + a^{-p})^{n-1} (a^p - a^{-p}) = a^{np} + P' a^{np-2p} + Q' a^{np-4p} + \&c.$$
$$(a^p + a^{-p})^{n-2} (a^p - a^{-p})^2 = a^{np} + P'' a^{np-2p} + Q'' a^{np-4p} + \&c.$$
$$\&c.$$

& l'on trouvera, pour le coefficient de la puissance $n p - x$, la série

$$\frac{(2 K p)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 .. 2 n-1} \left(x^{2n-1} + P(x-2p)^{2n-1} + Q (x-4p)^{2n-1} + \&c.\right) dx$$
$$-n \frac{(2K)^n p^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 ... 2n} \left(x^{2n} + P' (x-2p)^{2n} + Q (x-4p)^{2n} + \&c.\right) du$$
$$+ \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{(2K)^n p^{n-2}}{1.2.3...2n+1} \left(x^{2n+1} + P''(x-2p)^{2n+1} + Q(x-4p)^{2n+1} + \&c.\right) dx$$
$$- \&c.$$

On fera donc $z = n p - x$, c'est-à-dire, $x = n p - z$, & on intégrera de manière que l'intégrale soit nulle lorsque $z = r$,

& complette lorſque $z = -s$, c' eſt-à-dire, nulle quand $x = np - r$, & complette quand $x = np + s$, on aura la quantité

$$\frac{(2Kp)^n}{1.2.3\ldots 2n}\Big((np+s)^{2n} + P((n-2)p+s)^{2n} + Q((n-4)p+s)^{2n} + \&c.$$
$$- (np-r)^{2n} + P((n-2)p-r)^{2n} - Q((n-4)p-r)^{2n} - \&c.\Big)$$
$$-n\frac{(2K)^n p^{n-}}{1.2.3\ldots 2n+1}\Big((np+s)^{2n+1} + P'((n-2)p+s)^{2n+1} + Q'((n-4)p+s)^{2n+1} + \&c.$$
$$- (np-r)^{2n+1} - P'((n-2)p-r)^{2n+1} - Q'((n-4)p-r)^{2n+1} - \&c.\Big)$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{(2K)^n p^{n-2}}{1.2.3\ldots 2n+2}\Big((np+s)^{2n+2} + P''((n-2)p+s)^{2n+2} + Q''((n-4)p+s)^{2n+2} + \&c.$$
$$- (np-r)^{2n+2} - P''((n-2)p-r)^{2n+2} - Q''((n-4)p-r)^{2n+2} - \&c.\Big)$$
$$- \&c.$$

laquelle exprimera la probabilité que l' erreur moyenne de n obſervations ſoit compriſe entre les limites r, & $-s$; au reſte il faudra toujours ſe ſouvenir que les ſéries précédentes ne doivent être continuées que juſqu' à ce que quelques unes des quantités qui ſont élevées aux puiſſances $2n$, $2n+1$ &c. deviennent négatives.

Remarque.

43. L' hypothèſe du dernier exemple paroit la plus ſimple & la plus naturelle qu' on puiſſe imaginer ; il eſt vrai que celle du problême 8. paroit encore plus ſimple, puiſqu'on y ſuppoſe que la facilité des erreurs x & $-x$ ſoit repréſentée par $p - x$, p étant la plus grande valeur poſſible de x, c' eſt-à-dire, la limite des erreurs tant poſitives que négatives ; mais cette hypothèſe a l' inconvenient que la loi de continuité n' y eſt pas obſervée en paſſant des erreurs poſitives, aux négatives ; c'eſt pourquoi, ſi on vouloit y appliquer la méthode du prob. préc., il faudroit en faiſant $y = K(p - x)$ prendre d' abord l' intégrale de

$\int y\, a^{x}\, d\, x$ depuis $x = o$ jusqu' à $x = p$, laquelle feroit

$$K\left(\frac{a^{p}-1}{(l\, a)^{2}} - \frac{p}{la}\right)$$

ensuite, en faisant x négatif, & conservant la même valeur de y, il faudroit prendre de même l' intégrale de $\int y\, a^{-x}\, dx$ depuis $x = o$ jusqu' à $x = p$, laquelle feroit (en ne faisant que mettre $\frac{1}{a}$ à la place de a dans l' expression précédente)

$$K\left(\frac{a^{-p}-1}{(l\, a)^{2}} + \frac{p}{la}\right)$$

& la somme de ces deux intégrales particulières feroit l' intégrale complette de $\int y\, a^{x}\, d\, x$ depuis $x = p$ jusqu' à $x = -p$ dans l' hypothèse dont il s' agit; on aura donc la quantité $K\left(\frac{a^{p}+a^{-p}-2}{(la)^{2}}\right)$, ou bien $K\left(\frac{a^{\frac{p}{2}}-a^{\frac{-p}{2}}}{l\, a}\right)^{2}$ qu' il faudra élever à la puissance n, & sur laquelle on pourra ensuite opérer, comme dans l' exemple I.; on pourra même, sans faire un nouveau calcul, appliquer ici les formules de cet exemple en y mettant $2\, n$ à la place de n, $\frac{p}{2}$ à la place de p, & de q, & par conséquent p à la place de $t = p + q$; de cette manière on aura sur le champ l' expression de la probabilité que l' erreur moyenne de n observations soit renfermée entre les limites r, & $-s$, laquelle sera

$$\frac{K^{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \,\ldots\, 2\, n}\Big((p\, n + s)^{2n} - 2\, n\, ((n-1)\, p + s)^{2n}$$
$$+ \frac{2\, n\, (2\, n - 1)}{2}\, ((n-2)\, p + s)^{2n} - \&c.$$
$$- (p\, n - r)^{2n} + 2\, n((n-1)\, p - r)^{2n}$$
$$- \frac{2\, n\, (2\, n - 1)}{2}\, ((n-2)\, p - r)^{2n} + \&c.\Big)$$

ce qui s' accorde avec la formule de l'art. 31.

Problême II.

44. Suppofant que chaque obfervation foit fujette à toutes les erreurs poffibles comprifes entre les limites p & $-p$, (p étant l'arc de 90 dégrès) & que la facilité de chaque erreur x foit proportionelle a $cof.\ x$; on demande la probabilité que l'erreur moyenne de n obfervations fera renfermée entre les limites r & $-s$.

On aura donc ici $y = K\ cof.\ x$, & il s'agira d'abord d'intégrer la différentielle $K\ a^x . cof.\ x\ dx$, dont l'intégrale, (en mettant $\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$ à la place de $cof.x$) fe trouvera par l'art. 39.

$$\frac{K a^x}{2}\left(\frac{e^{x\sqrt{-1}}}{la+\sqrt{-1}} + \frac{e^{-x\sqrt{-1}}}{la-\sqrt{-1}}\right)$$

c'eft-à-dire, en repaffant des exponentiels imaginaires aux *finus* & *cofinus*,

$$K\ a^x \left(\frac{l\ a\ cof.\ x + fin.\ x}{(l\ a)^2 + 1}\right)$$

cette intégrale doit maintenant être prife enforte qu'elle s'étende depuis $x = -p$, auquel cas $cof.\ x = o$ & $fin.\ x = 1$ jufqu'à $x = p$, où $cof.\ x = o$ & $fin.\ x = 1$; ainfi l'on aura pour l'intégrale complette

$$\frac{K\ (a^p + a^{-p})}{(l\ a)^2 + 1}$$

Qu'on élève donc cette quantité à la puiffance n, & faifant pour abréger

$$A = K^n\ (a^{pn} + n\ a^{pn-2p} + \frac{n\ (n-1)}{2}\ a^{pn-4p} + \&c.)$$

on aura la quantité $\frac{A}{((l\ a)^2 + 1)^n}$ dans laquelle il s'agira maintenant de chercher le coefficient de la puiffance a^t.

Pour cela il faudra (art. 38.) décompofer la fraction $\frac{1}{((l\ a)^2 + 1)^n}$ c'eft-à-dire, $\frac{1}{(la+\sqrt{-1})^n\ (la-\sqrt{-1})^n}$ en ces fra-

ctions ſimples

$$\frac{F}{(la+\sqrt{-1})^n}+\frac{F'}{(la+\sqrt{-1})^{n-1}}+\frac{F''}{(la+\sqrt{-1})^{n-2}}+\&c.$$

$$+\frac{G}{(la-\sqrt{-1})^n}+\frac{G'}{(la-\sqrt{-1})^{n-1}}+\frac{G''}{(la-\sqrt{-1})^{n-2}}+\&c.$$

& l'on aura par les méthodes connues (art. 33.)

$$F=\frac{1}{(-2\sqrt{-1})^n},\ F'=-\frac{n}{(-2\sqrt{-1})^{n+1}},\ F''=\frac{n\,(n+1)}{2(-2\sqrt{-1})^{n+2}}\ \&c.$$

$$G=\frac{1}{(2\sqrt{-1})^n},\ G'=-\frac{n}{(2\sqrt{-1})^{n+1}},\ G''=\frac{n\,(n+1)}{2(2\sqrt{-1})^{n+2}}\ \&c.;$$

multipliant enſuite par A chacune de ces fractions, on trouvera par la méthode de l'art. 38., que le coefficient de la puiſſance a^{pn-x} ſera exprimé de cette manière

$$\frac{K^n\,dx}{1.2.3\ldots n-1}\Big((Fe^{-x\sqrt{-1}}+Ge^{x\sqrt{-1}})x^{n-1}$$
$$+n\,(Fe^{-(x-2p)\sqrt{-1}}+Ge^{(x-2p)\sqrt{-1}})\,(x-2p)^{n-1}$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}(Fe^{-(x-4p)\sqrt{-1}}+Ge^{(x-4p)\sqrt{-1}})\,(x-4p)^{n-1}+\&c.\Big)$$
$$+\frac{K^n\,dx}{1.2.3\ldots n-2}\Big((F'e^{-x\sqrt{-1}}+G'e^{x\sqrt{-1}})\,x^{n-2}$$
$$+n\,(F'e^{-(x-2p)\sqrt{-1}}+G'e^{(x-2p)\sqrt{-1}})\,(x-2p)^{n-2}$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}(F'e^{-(x-4p)\sqrt{-1}}+G'e^{(x-4p)\sqrt{-1}})\,(x-4p)^{n-2}+\&c.\Big)$$
$$+\frac{K^n\,dx}{1.2.3\ldots n-3}\Big((F''e^{-x\sqrt{-1}}+G''e^{x\sqrt{-1}})\,x^{n-3}$$
$$+n\,(F''e^{-(x-2p)\sqrt{-1}}+G''e^{(x-2p)\sqrt{-1}})\,(x-2p)^{n-3}$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}(F''e^{-(x-4p)\sqrt{-1}}+G''e^{(x-4p)\sqrt{-1}})\,(x-4p)^{n-3}+\&c.\Big)$$
$$+\&c.$$

Or on a $e^{\pm x\sqrt{-1}}=cof.\,x\pm\sqrt{-1}\,fin.\,x$, & ainſi des autres ; donc ſubſtituant ces valeurs, & faiſant pour abréger

$$G+F=f,\ G-F=\frac{g}{\sqrt{-1}},\ G'+F'=f',\ G'-F'=\frac{g'}{\sqrt{-1}}$$

$$G''+F''=f'',\ G''-F''=\frac{g''}{\sqrt{-1}}$$ &c., où les quantités

f, g, f', g' &c. feront néceffairement réelles, la formule précédente deviendra

$$\frac{K^n\,dx}{1.2.3\ldots n-1}\Big((f\,cof.\,x + g\,fin.\,x)\,x^{n-1} + n\,(f\,cof.\,(x-2p) + g\,fin.\,(x-2p))\,(x-2p)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\,(f\,cof.\,(x-4p) + g\,fin.(x-4p))\,(x-4p)^{n-1} + \&c.\Big)$$

$$+ \frac{K^n\,dx}{1.2.3\ldots n-2}\Big((f'\,cof.\,x + g'\,fin.\,x)\,x^{n-2} + n\,(f'\,cof\,(x-2p) + g'\,fin.\,(x-2p))\,(x-2p)^{n-2} + \frac{n(n-1)}{2}\,(f'\,cof.\,(x-4p) + g'\,fin.(x-4p)(x-4p)^{n-2} + \&c.\Big)$$

$$+ \frac{K^n\,dx}{1.2.3\ldots n-3}\Big((f''\,cof.\,x + g''\,fin.\,x)\,x^{n-3} + n\,(f''\,cof.\,(x-2p) + g''\,fin.\,(x-2p))\,(x-2p)^{n-3} + \frac{n(n-1)}{2}(f''\,cof.(x-4p) + g''\,fin.\,(x-4p)\,(x-4p)^{n-3} + \&c.\Big)$$

$+$ &c.

où il faudra continuer les différentes féries jufqu'à ce que les quantités x, $x-2p$, $x-4p$ &c. ou leurs expofans deviennent négatifs; cette quantité exprimera donc la probabilité que l'erreur moyenne de n obfervations foit $pn-x$; par conféquent il n'y aura plus qu'à l'intégrer de manière que l'intégrale foit nulle lorfque $x = pn - r$, & complette lorfque $x = pn + s$ pour avoir l'expreffion cherchée de la probabilité que l'erreur moyenne foit renfermée entre les limites données r & $-s$; mais comme cette intégration eft facile par les méthodes connues, nous n'entrerons pas dans un plus grand détail là-deffus; & nous terminerons même ici nos recherches, par lefquelles on doit voir qu'il ne refte plus de difficulté dans la folution des queftions qu'on peut propofer fur ce fujet.

THEO-

THEORÈME

Pour servir de suite au mémoire sur différentes questions d'Analyse.

PAR M. LE MARQUIS DE CONDORCET.

Soient les 3 équations $V = o$, $V' = o$, $V'' = o$; V, V', V'' étant fonctions de x, y, z, si je mets ces équations sous la forme $x = A + \varphi$, $y = B + \varphi'$, $z = C + \varphi''$, où $\varphi, \varphi', \varphi''$ contienent d'une façon quelconque les trois variables x, y, z, j'aurai $\Psi\, x, y,$

$$z = \overset{(1)}{\Psi\, A, B, C} + \overset{(2)}{\frac{d\Psi}{dA}}\varphi + \overset{(3)}{\frac{d^2\Psi}{2dA^2}}\varphi^2 + \frac{d^3\Psi}{2.3.dA^3}\varphi^3$$

(Ψxyz, est une autre fonction quelconque de x, y, z)

$$\begin{aligned}
&+ \frac{d\Psi}{dB}\varphi' + \frac{2dd\Psi}{2dAdB}\varphi\varphi' + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \frac{d\Psi}{dC}\varphi'' + \frac{2dd\Psi}{2dAdC}\varphi\varphi'' + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \frac{2dd\Psi}{2dBdC}\varphi'\varphi'' + \frac{dd\Psi}{2dA^2} \\
&+ \frac{dd\Psi}{dB^2}\varphi'^2 + \frac{2dd\Psi}{2dAdB}\varphi D' + \varphi' D \\
&+ \frac{dd\Psi}{dC^2}\varphi''^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \frac{d\Psi}{dA} D + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \frac{d\Psi}{dB} D' + \frac{d\Psi}{dA} E \\
&+ \frac{d\Psi}{dC} D'' + \frac{d\Psi}{dB} E' \\
&+ \frac{d\Psi}{dB} E''
\end{aligned}$$

où D, D', D'' sont ce que devient le terme (2) en y mettant pour Ψ, φ, φ', ou φ'', E, E' E'' ce que devient le terme (3) en y mettant pour Ψ, φ, φ', ou φ''; & le

terme (m) se trouvera en prenant $\Psi(A+\Delta A, B+\Delta B, C+\Delta C)$ par le théorème de M. d' Alembert, en mettant pour $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ $\phi+\phi^{(2)}+\phi^{(3)}+\phi^{(4)}\ldots\ldots+\phi^{(n-2)}$.. $\phi^{1}+\phi^{1(2)}+\phi'^{(3)}\ldots\ldots+\phi'^{(n-2)}$, $\phi''+\phi''^{(2)}+\phi''^{(3)}\ldots+\phi''^{(n-2)}$, $\phi^{(m)}$ $\phi'^{(m)}$ $\phi''^{(m)}$; désignant en général le terme (m) de la série en Ψ où pour Ψ on auroit mis ϕ, ϕ' ou ϕ'', & en prenant dans ce que devient alors $\Psi\, A+\Delta A, B+\Delta B, C+\Delta C$, le terme où ϕ & Ψ montent au dégré n, les fonctions $\phi^{(m)}$ $\phi^{1(m)}$ $\phi^{11(m)}$ étant regardées comme du dégré m; on aura donc la valeur de chaque terme de la série qui représente $\Psi\, x, y, z$, par une fonction finie des termes précédents.

Si cette forme ne paroit pas assez simple, on peut y substituer celle-ci,

$$\Psi x, y z = \Psi A, B C + \frac{d\Psi}{dA}\phi + \frac{d\frac{d\Psi}{dA}\phi^2}{2\,dA} + \frac{d^2\left(\frac{d\Psi}{dA}\phi^3\right)}{2.3\ldots dA^2} + \frac{d^3\left(\frac{d\Psi}{dA}\phi^4\right)}{2.3.4.dA^3}$$

$$+\frac{d\Psi}{dB}\phi' + \frac{\phi'}{\phi}\frac{d\frac{d\Psi}{dA}\phi^2}{2\,dB} + \frac{d^2\left(\frac{d\Psi}{dA}V\right)}{2.3.dA\,dB} + \ldots\ldots$$

$$+\frac{d\Psi}{dC}\phi'' + \frac{\phi''}{\phi}\frac{d\frac{d\Psi}{dA}\phi^2}{2\,dC} + \frac{d^2\left(\frac{d\Psi}{dA}V\right)}{2.3.dB\,dA}$$

$$+\frac{d\left(\frac{d\Psi}{dB}\phi^{12}\right)}{2\,dB} + \ldots\ldots$$

$$+\frac{\phi}{\phi'}\frac{d\frac{d\Psi}{dB}\phi^{12}}{dA} + \ldots\ldots$$

$$+\frac{\phi''}{\phi'}\frac{d\left(\frac{d\Psi}{dB}\phi^{12}\right)}{2\,dC}$$

$$+\frac{d\left(\frac{d\Psi}{dC}\phi^{12}\right)}{2\,dC}$$

$$+\frac{\phi'}{\phi''}\frac{d\left(\frac{d\Psi}{dC}\phi''^2\right)}{2\,dB}$$

$$+\frac{\phi}{\phi''}\frac{d\left(\frac{d\Psi}{dC}\phi''^2\right)}{2\,dA}$$

où V eſt une quantité telle que

$$\frac{dV}{dA} = \frac{\Phi'}{\varphi} \frac{d\left(\Phi^2 \Phi^1 \times \frac{\phi}{\varphi'}\right) \frac{dV}{dB}}{dA} = \frac{\Phi'}{\varphi} \frac{d\left(\Phi^2 \Phi' \times \frac{\phi}{\varphi'}\right) d\left(\frac{dV}{dA}\right)}{dB \qquad\qquad dB}$$

$$= \frac{\Phi'}{\varphi}\, d\left(\frac{dV}{dA} \frac{\phi}{\varphi'}\right) \;\&\; \frac{d\left(\frac{dV}{dB}\right)}{dA} = \frac{\phi}{\Phi'} \frac{d\left(\frac{dV}{dB} \frac{\phi'}{\varphi}\right)}{dA}$$, & ainſi

de ſuite. Ces termes ſuffiſent pour voir la manière dont il faut s'y prendre pour trouver les autres & continuer la ſérie. On voit que la méthode eſt générale pour un nombre quelconque de variables. Le théorème ſe démontrera toujours avec la même facilité, & de la même manière que j'ai démontré celui de M. De la Grange pour une ſeule variable. Il eſt inutile de s'étendre ici ſur l'uſage qu'on en peut faire dans tous les problêmes dépendans des éliminations & des ſéries.

NOUVELLES RECHERCHES

Sur les équations déterminées, pour ſervir de ſuite & de développement au mémoire ſur le même objet, déja inſéré dans ce volume.

Le but que je me propoſe ici eſt de prouver. 1.° Que ſi une équation déterminée de l'ordre n eſt réſoluble par une formule générale, c'eſt-à-dire, ſi ſa racine eſt ſuſceptible d'une expreſſion finie; il n'y a, pour la trouver, d'autre difficulté que celle de la longueur des calculs. 2.° D'indiquer la marche d'une méthode générale, par laquelle on parviendroit dans ce cas à trouver la racine, & d'examiner les moyens de faciliter cette méthode que l'analyſe peut fournir. 3.° D'indiquer comment on pourroit s'aſſurer ſi une telle équation eſt ou n'eſt pas poſſible.

ARTICLE I.

De la forme générale des fonctions radicales, du degré où montent les équations qui ſervent à les déterminer, & de la recherche des coefficiens de ces équations; d'où l'on déduit la preuve du premier objet de ce mémoire.

I. Soit la forme $\sqrt[n]{A}$, elle a n valeurs: ces n valeurs ſont $\sqrt[n]{A}$ multiplié ſucceſſivement par les n racines de l'équation $y^n - 1$; & ſi on fait $x = \sqrt[n]{A}$, on aura $x^n - A = 0$.

II. Soit $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$ &c. ces quantités étant au nombre de m, comme chacune peut être multipliée par chacune de n racines de $y^n - 1 = 0$, x pourra avoir n^m valeurs, & par conſéquent ſera donné par une équation du degré n^m.

III. Il eſt aiſé de voir que cette équation ne peut contenir que les termes

$$x^{n^m},\ x^{n^m - n},\ x^{n^m - 2n},\ \&c.$$

en effet ce ſont les ſeuls qui puiſſent contenir les termes rationnels A, B, C, &c. A^2, B^2, C^2, AB, AC, &c.

IV. Chaque A, B, C, &c. devant entrer d'une manière ſemblable dans les coefficiens, le coefficient de $x^{n^m - n}$ ſera de la forme

$$\overline{A + B + C \ldots\ldots} \times p;$$

celui de $x^{n^m - 2n}$ ſera

$$\overline{A^2 + B^2 + C^2 \ldots\ldots} p'$$
$$+ \overline{AB + AC \ldots\ldots + BC, \&c.}\ q';$$

celui de $x^{n^m - 3n}$ ſera

$$A^3 + B^3 + C^3 \ldots\ldots p''$$
$$+ A^2B + A^2C + B^2A + B^2C\ \&c.\ q''$$
$$+ ABC\ \&c.\ r''; \ \&\ \text{ainſi de ſuite.}$$

V. Pour trouver p, on obſervera que $\sqrt[n]{A}$ a pour coefficiens toutes les racines de l'équation $y^n - 1$, répétées un nombre n^{m-1} de fois chacune, ou bien les racines de l'équation $\overline{y^n - 1}^{\,n^{m-1}} = 0$; donc le coefficient de $(\sqrt[n]{A})^n$ ou le coefficient de A ſera la ſomme des produits de toutes les racines de l'équation $\overline{y^n - 1}^{\,n^{m-1}} = 0$, priſes n à n, c'eſt-à-dire, au coefficient de $y^{n^m - n}$, dans $y^n - 1$ élevé à la puiſſance n^{m-1}, ou à $-(n^{m-1})$.

VI. Pour trouver p', on obſervera que par la même raiſon ce terme doit être égal au coefficient de $y^{n^m - 2n}$ dans $\overline{y^n - 1}^{\,n^{m-1}}$ égal à $\frac{n^{m-1} \cdot \overline{n^{m-1} - 1}}{2}$; p'' ſera égal à $-\frac{n^{m-1} \cdot \overline{n^{m-1} - 1} \cdot \overline{n^{m-1} - 2}}{1 \cdot 2 \cdot 3}$; & ainſi de ſuite.

VII. Pour avoir q', on obſervera que le coefficient de x^{n^m-2n} eſt égal à la ſomme des produits des racines priſes $2n$ à $2n$; que dans chacun de ces produits on aura pour coefficient de AB la ſomme d'un nombre de produits des racines de $\overline{y^{n-1}-1}^{\,n^{m-1}}$ priſes $2n$ à $2n$ égal au coefficient de $P^n\,Q^n$ dans $\overline{P+Q}^{\,2n}$; mais le coefficient total de AB doit contenir tous les produits des racines de $\overline{y^n-1}^{\,n^{m-1}}$, $2n$ à $2n$, d'une manière ſemblable; donc, puiſqu'il contient un nombre de ces produits égal au nombre qu'il y en a de différens, multiplié par le coefficient de $P^n\,Q^n$ dans $\overline{P+Q}^{\,2n}$, il ſera égal à la ſomme des produits des racines de l'équation $\overline{y^n-1}^{\,n^{m-1}}$, priſes $2n$ à $2n$, multipliées par le coefficient de $P^n\,Q^n$ dans $\overline{P+Q}^{\,2n}$.

VIII. De même q'' ſera égal à $\dfrac{n^{m-1}\,.\,n^{m-1}-1\,.\,n^{m-1}-2}{1\,.\,2\,.\,3}$; multipliant le coefficient de $P^{2n}\,Q^n$ dans $\overline{P+Q}^{\,3n}$, & r'' au même terme multiplié par le coefficient de $P^n\,Q^n\,R^n$ dans $\overline{P+Q+R}^{\,3n}$, & ainſi de ſuite; en ſorte que le coefficient de x^{n^m-np} ſera

$$+\,\frac{n^{m-1}\,.\,n^{m-1}-1\,.\,n^{m-1}-2\,\ldots\,n^{m-1}-p+1}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\,p}\times\Big(A^p+B^p\ldots\ldots$$

$$+\,p,\,A^{p-1}\,B\,\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\,\zeta\,A^u\,B^t\,C^s\,\ldots\ldots\ldots\Big)$$

p, étant le coefficient de $P^{np-n}\,Q^n$ dans $\overline{P+Q}^{np}$, & z le coefficient de $P^{un}\,Q^{tn}\,R^{sn}$ dans $\overline{P+Q+R}^{np}$, $u+t+s\ldots\ldots=p$.

IX. Suppoſons maintenant que au lieu de $x=\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B}+\sqrt[n]{C}$ &c., au nombre de m, (qui ne varient que ſelon les coefficiens de $\sqrt[n]{A}$, $\sqrt[n]{B}$ &c. qui ſont les racines de $y^n-1=0$,) nous avons auſſi les A, B, C, &c. qui varient & qui deviennent ſuſceptibles de p combinaiſons différentes, l' équation en x deviendra du degré $p\,.\,n^m$. Suppoſons les différentes combinaiſons de A, B, C, &c. indépendantes les unes des autres, nous aurons l' équation en x égale au produit de p équations du degré n^m ſemblables entr' elles, & données par ce qui précède.

X. Soit donc $x^n=z$, $n^m=q$, nous aurons p équations

$z^q+PQ^{q-1}+Qz^{q-2}+Rz^{q-3}\ldots\ldots$

$z^q+P'z^{q-1}+Q'z^{q-2}+R'z^{q-3}$ &c.

Donc le coefficient de z^{qp-1} ſera $P+P'+P''$, &c. celui de z^{qp-2} ſera $Q+Q'+Q''+PP'+PP''\ldots\ldots$ & ainſi de ſuite.

XI. Maintenant ſoit s le degré de l' équation A, B, C &c. r le nombre des A, B, C, &c. différens qui entrent dans chaque racine (voyez le n.° ſuivant) p ſera égal à $\frac{s\,.\,s-1\,.\,s-2\ldots}{1\,.\,2\ldots\ldots r.}$: maintenant il eſt aiſé de voir que $P+P'+P''$ &c. doit (*article précédent*) être égal à n^{r-1}, puiſque j' appelle r ici ce qui étoit m (*articles précédens*). Multipliant $\frac{s\,.\,s-1\,.\,s-2\ldots\ldots}{1\,.\,2\ldots\ldots r}$ ſommes de r A, B, C, &c. donc cette ſomme contiendra $\frac{s\,.\,s-1\,.\,s-2\ldots}{1\,.\,2\ldots r-1}$ termes A, B, C, &c. donc, puiſque chaque terme y entre d' une manière ſemblable, diviſant par s, on aura

$P + P' \dots = n^{r-1} \cdot \frac{s-1 \cdot s-2 \dots\dots}{1 \dots r-1} \times$ (le second terme de l'équation en A).

XII. Ensuite $Q + Q' + Q'' = n^{r-1} \frac{s-1 \cdot s-2 \dots\dots}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r-1} \times$ (somme des quarrés des racines de l'équation en A) $+ \frac{n^{r-1} \cdot n^{r-1} - 1}{2}$, multipliant le coefficient de $P^n Q^n$ dans $\overline{P+Q}^n$; multipliant une quantité égale à $\frac{s \cdot s-1 \cdot s-2 \dots}{1 \cdot 2 \dots r}$ produits deux à deux de A, B, C, pris entre r de ces quantités; donc ce nombre sera $\frac{s \cdot s-1 \cdot s-2 \dots}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r}$ $\frac{r \cdot r-1}{2}$ produits deux à deux, mais le nombre total est $\frac{s \cdot s-1}{2}$ & tous doivent y entrer semblablement: donc ce terme sera égal à $\frac{s-2 \cdot s-3 \dots}{1 \dots r-2} \times$ (le troisième terme de l'équation en A); ensuite pour avoir $PP' + PP'' \dots$ je remarquerai que (le nombre des P étant p, celui de ces produits $\frac{p \cdot p-1}{1 \cdot 2}$) chacun contiendra $n^{\overline{r-1} \cdot 2}$ termes en A, B, C, &c. que dans la série des P. A sera répété $\frac{s-1 \cdot s-2 \dots}{1 \cdot 2 \dots r-1} n^{r-1}$ fois; ou n^{r-1}. A un nombre $\frac{s-1 \cdot s-2 \dots}{1 \cdot 2 \dots r-1}$ fois que j'appelle p' fois, donc dans $PP' + PP''$ &c. A^2 se trouvera répété $\frac{p' \overline{p'-1}}{2} n^{2 \cdot \overline{r-1}}$ fois; donc ce terme contiendra $\frac{p' \overline{p'-1}\, n^{2 \cdot \overline{r-1}}}{2}$ (somme des quarrés de A^2) plus $\frac{p \cdot p-1}{2} n^{n \cdot \overline{r-1}} - \frac{p' \cdot \overline{p'-1}\, n^{2 \cdot \overline{r-1}}}{2}$

termes

termes où les produits ſont de A, B, C, &c. différens; donc diviſant ce terme par $\frac{s \,.\, \overline{s-1}}{1 \,.\, 2}$ & appellant le quotient M, on aura pour la valeur de ce terme $M \times$ (le troiſième terme de l' équation en A).

XIII. Connoiſſant donc l' équation en A, on aura par ce moyen les coefficiens de l' équation en x par la doctrine des combinaiſons, pourvu qu' on ait la manière de trouver les fonctions ſemblables de toutes les racines de l' équation en A.

XIV. Cela poſé, je ſuppoſe que j' aie

$$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} \; \ldots\ldots$$

au nombre de p; que A ſoit de la forme

$$P + \sqrt[n']{A'} + \sqrt[n']{B'}$$

au nombre de p', j' aurai $s = n'^{\,p'}$; l' équation en $\overline{A - P}$ ſe formera comme ci-deſſus, & par conſéquent l' équation en x qui ſera du degré $\frac{n'^{\,p'} \,.\, \overline{n'^{\,p'} - 1} \ldots\ldots}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots\ldots p} \times n^p$.

XV. Si on ſuppoſe que les A', B', &c. ſont de la forme

$$p' + \sqrt[n'']{A''} + \sqrt[n'']{B''}$$

au nombre de p'', on aura A par une équation du degré $\frac{n''^{\,p''} \,.\, \overline{n''^{\,p''} - 1} \ldots\ldots}{2 \,.\, 3 \ldots\ldots p'}\, n^{p'}$, & par conſéquent x par une équation du degré

$$\frac{\frac{n''^{\,p''} \,.\, \overline{n''^{\,p''} - 1} \ldots}{1 \ldots\ldots p'}\, n'^{\,p'} \,.\, \frac{n''^{\,p''} \,.\, \overline{n''^{\,p''} - 1} \ldots\ldots}{2 \,.\, 3 \ldots p'}\, n'^{\,p'} - 1 \ldots\ldots}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots\ldots\ldots p}\, n^p,$$

& ainſi de ſuite pour des formes plus compliquées.

XVI. Nous nous bornerons maintenant à conclure de cette Théorie; 1.° que l' on doit toujours ſuppoſer que $p <$ que le degré de l' équation en A, $p' <$ que le degré de l' équation en A', $p'' <$ que le degré de l' équation en A'', & ainſi de ſuite. Autrement le nombre des

A, B, C, étant plus grand qu' il ne peut être, il faudroit qu' ils fuſſent répétés pluſieurs fois; ce qui eſt contre l' hypothèſe. 2.° Qu' on n' a ſuppoſé pour l' équation en x que des racines où les A, B, C, &c. fuſſent différens dans chacune; il auroit été facile d' y faire entrer les racines où ils ſont les mêmes; mais cela étoit inutile, parceque les racines où ils ſeroient les mêmes formeroient des ſéries de racines

$$2\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$$
$$2\sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{C}\text{, \&c.}$$

où le nombre des radicaux eſt moindre, & qui donneroient par conſéquent des racines rationnelles en x, d'un degré moindre que celui de la ſérie totale des valeurs de x; donc l' équation en x ſeroit diviſée par celles là, & le quotient ſeroit l' équation trouvée ci-deſſus. 3.° Si on fait $p' = n''^{p''}$, on aura A par une équation du degré $n'^{p'}$; & ſi $p = n'^{p'}$, on aura x par une équation du degré n^p. Si on fait $p' = n''^{p''} - 1$ & $p = n'^{p'} - n''^{p''}$, on aura A par une équation du degré $n''^{p''}\, n'^{p'}$, & x par une équation du degré $n^p\, n'^p\, n'^{p''}$ &c. &c. &c.

XVII. Cela poſé, imaginons que l' une des formes ci-deſſus qui contient 2, 3 radicaux ſucceſſifs, repréſente la racine de l' équation du degré n, comme (articles précédens) le degré où elle monte eſt toujours multiple de n; ſoit $n\,u$ ce degré, on aura u équations du degré n, qui par leur multiplication doivent produire la popoſée.

XVIII. Suppoſons d' abord que l' on ait l' équation $x^n + a\,x^{n-2} + b^2\,x^{n-3} + c^3\,x^{n-4} \ldots\ldots + h^n$, & que l' on ait l' équation du degré x^{nu}, dont (art. précéd.) les coefficiens ſoient donnés en P, P', $P'' \ldots\ldots A_{,,,}\,m$, $B_{,,,}\,m$, le nombre des P étant m, & $m + 1$ le nombre des radicaux ſucceſſifs; il eſt aiſé de voir que ſi x eſt une fonction du degré 1 homogène & a, b, $c \ldots\ldots h$, P ſera une fonction rationnelle & entière du degré n; P' une

du degré $n n'$; P'' du degré $n n' n''$, & $A_{\prime\prime\prime\prime m}$ du degré $n n' n'' \ldots n'''^{m}$, & que les coefficiens de ces fonctions pourront être rationnels. Prenant donc l'équation hypothétique du degré $n u$ formée par cette hypothèſe, prenant une autre équation hypothétique du degré $n u - n$; multipliant celle-ci par la propoſée, & comparant terme à terme, on aura, ſi on a pris pour n, n', n'', &c. des valeurs convenables, on aura, dis-je, les coefficiens rationnels des différens termes qui entrent dans $P, P', P'' \ldots A_{\prime\prime\prime\prime m}$ par des équations numériques, & le problême ſera réſolu. Or comme on peut prendre n, n', n'' à volonté, & en auſſi grand nombre qu'on veut, il eſt clair que toutes les fois qu'une équation aura une racine de cette forme, on la trouvera par cette méthode; donc pour prouver que cette méthode eſt générale pour toutes les équations, dont les racines ont une forme finie, il reſte à prouver ſeulement que toutes les fonctions algébriques & finies peuvent être repréſentées par cette forme générale.

XIX. Je ſuppoſe d'abord que la fraction ſoit réduite à un ſeul dénominateur rationnel, ce qui eſt toujours poſſible en général, & que l'on faſſe abſtraction de ce dénominateur; je remarque 1.° que les formes

$$\sqrt[n]{A} + \sqrt[n']{B} + \sqrt[n'']{Q} \text{ \&c.}$$

ſont réductibles à la forme précédente, en les écrivant $\sqrt[n n' n'' \ldots]{A^{n' n'' \ldots}} + \sqrt[n n' n'' \ldots]{B^{n n''}} \ldots$ &c. que les formes $P \sqrt[n]{A}$ ſont les mêmes que $\sqrt{P^n A}$. 2.° Cela poſé, ſuppoſons une forme où il y ait deux radicaux ſucceſſifs; il eſt clair qu'elle ſera (les radicaux ſupérieurs & inférieurs étant réduits au même degré, comme je viens de le dire) il eſt clair, dis-je, qu'elle ſera de la forme

$$\sqrt[n]{A + \sqrt[m]{B} + \sqrt[m]{C}} \ldots\ldots\ldots \text{ (en nombre } r\text{)}$$

$$+ \sqrt[n]{A' + \sqrt[m]{B'} + \sqrt[m]{C'}} \ldots\ldots\ldots \text{ (en nombre } r'\text{)}$$

(& un nombre quelconque de termes de cette forme). Dans ce cas il eſt aiſé de voir que ſuppoſant que r eſt le plus grand des r, r', r'', &c. on peut mettre le terme A' & tous les termes ſemblables ſous la forme $A + \sqrt[m]{(A' - A^m)}$, alors la forme deviendra

$$\sqrt[n]{A + \sqrt[m]{B} + \sqrt[m]{C}}$$

$$\sqrt[n]{A + \sqrt[m]{B'} + \sqrt[m]{C'}}, \text{ \&c.}$$

ou l'on peut ſuppoſer le nombre des radicaux égal dans chacune, puiſque s'il en faut trois de plus, par exemple, on peut prendre A' & le faire égal à $A + \sqrt[m]{(B_{,} - A)^m} + \sqrt[m]{(B_{,,} - B)^m} + \sqrt[m]{(A' - B'')^m}$, ou bien ſuppoſer que deux ou trois de A, B, C, ſont zéro. Soit donc p le nombre des radicaux ſous le ſigne n, & r celui des radicaux ſous le ſigne m, on aura $n\,r$, B, C, &c. qui priſes r à r, donneront les valeurs des termes ſous le ſigne; donc nous aurons cette fonction de la forme ci-deſſus (n.° XI., XII., XIII., & XIV.) où ce que nous avons appellé n & p eſt le même, & $s = m^r$. Il en ſera de même des formes plus compliquées; il faut ſur-tout obſerver ici que ſouvent pour réduire à cette forme, il faut, comme l'on voit, la ſuppoſer beaucoup plus compliquée que celle ſous laquelle la fonction ſe préſente.

XX. Maintenant il reſte à prouver que la fonction ne peut avoir de dénominateur. Soit donc $\frac{\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} \ldots}{P}$ la valeur de la racine d'une équation où le coefficient de la plus haute puiſſance eſt numérique, & dont les racines ſont x, x', x'' &c. on aura $\frac{\sqrt[n]{A}}{P} = a\,x + b\,x' + c\,x''$ &c. a, b, c, étant numériques; or faiſant $y = a\ x + b\,x' + c\,x''$ &c. on aura y par une équation où auſſi la plus haute puiſſance aura un coefficient numérique & les autres entiers; donc $\frac{A}{P^n}$ ſera une fonction entière; mais $\frac{A}{P^n} = \frac{A' + \sqrt[m]{B'} + \sqrt[m]{C'}}{P^n}$;

donc $\frac{\sqrt[m]{B}}{P^n}$ ſera une fonction entière, & par conſéquent $\frac{B}{P^{mn}}$, & ainſi de ſuite; donc en général $\frac{\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}}{P}$ ſera immédiatement diviſible par P; donc on peut la ſuppoſer entière. Or il eſt aiſé de voir qu' il doit être général que le coefficient de la plus haute puiſſance de y ſoit numérique, car ce coefficient ne dépend que du premier coefficient de la propoſée, qu' on peut ſuppoſer l' unité, & du degré de l' équation, & eſt indépendant de tous les autres.

XXI. J' ai donc prouvé que l' on auroit toujours une méthode générale de trouver la racine d' une équation du degré, pourvu que cette racine fût d' une forme finie; mais le nombre des radicaux ſucceſſifs & leurs expoſans, reſtent indéterminés; d' ailleurs l' équation en x à laquelle on compare la propoſée, eſt beaucoup plus élevée peut être qu' elle ne doit l' être. C' eſt donc à ſimplifier cette méthode, & à tacher de déterminer, s' il eſt poſſible, le nombre de degrés des radicaux, que je dois m' occuper maintenant.

ARTICLE II.

Nous examinerons quatre queſtions dans cet article. 1.° La manière dont l' équation produite par l' évanouiſſement des radicaux ſucceſſifs & dont la racine eſt $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$, &c. peut ſe réduire à une équation rationnelle du n.^{e} degré. 2.° Combien & quels radicaux ſont néceſſaires pour que cela ſoit poſſible. 3.° De la réduction & ſolution des équations en A, B, C. 4.° De la marche générale la plus ſimple qu' on puiſſe faire ſuivre à la méthode.

I. Soit l'équation dont la racine eſt $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$, &c. rationnelle du degré n, & ſoit p le nombre total des A, B, C, &c. il eſt clair que ce nombre doit être égal ou plus grand que

$n-1$. En effet, s'il étoit plus petit, soient x, x', x''.... les n racines de la proposée, nous aurions entre $n-1$ de ces racines une équation linéaire ; ce qui est contre l'hypothèse, puisqu'on peut les supposer quelconques. D'où il suit que si les mêmes A, B, C, se trouvent dans chaque racine de l'équation, il faut que ces $n-1$ termes au moins se trouvent dans chacune.

II. Soit maintenant

$$\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}, \text{ \&c.}$$

une des racines, les A, B, C, &c. étant au nombre de $n-1$, & appelons n, n', n'', n''', &c. les n racines de l'équation $y^n - 1 = o$, les n^{n-1} combinaisons différentes de ces racines donneront n^{n-1} racines de l'équation en x. Supposons que $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$ &c. soit une racine de l'équation rationnelle en x, il faut que tout système de radicaux convenant à cette équation du degré n, soit assujetti aux conditions de l'article précédent. Le nombre total de systèmes de n racines est ici, $(n^{n-1}) = s$, $\frac{s \cdot s-1 \cdot s-2 \ldots}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$; mais comme il n'est question que de ceux qui contiennent $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$, &c. le nombre est réduit à $\frac{s-1 \cdot s-2 \ldots}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n-1}$. Maintenant 1.° tout système de ces $\overline{n-1}$ radicaux, qui contiendroit un ou plusieurs des $\overline{n-1}$ racines n', n'', n'', multipliant $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$.... est exclus ; donc il ne restera plus que

$\frac{s-n \cdot s-n-1 \text{ \&c.}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n-1}$ systèmes. 2.° Il est aisé de voir que, si on divise $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$, &c. en deux parties $P + Q$, le cas où le système des n racines contiendroit deux formules $n' P + n'' Q$, ou en le divisant en trois $P + Q + R$, ce système contiendroit trois formules $n' P + n'' Q + n''' R$, & ainsi de suite, doit être également exclus. 3.° Que soit $n' \sqrt[n]{A} + n'' \sqrt[n]{B} + n''' \sqrt[n]{C}$, &c.

une ſeconde racine, toute formule . . . . ($n' \sqrt[n]{A} + n'' \sqrt[n]{B}$ &c.) × n' ſera exclue; or comme n'^2, $n'\ n''$ &c. ſont auſſi des racines de l'équation $y^n - 1 = o$, la formule ($n' \sqrt[n]{A} + n'' \sqrt[n]{B}$ &c.) n' ſera une des s racines; ainſi cette obſervation exclut encore des racines de l'équation en x du degré n^{n-1} toute cette claſſe de racines, & ainſi de ſuite.

III. Mais ſans chercher par ce moyen le nombre de ſyſtèmes répondant à la racine $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$, &c. il eſt aiſé de s'aſſurer qu'il n'y en a en général qu'un ſeul; en effet, ſi $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$, &c. appartenoit à deux ſyſtèmes de n racines d'équations rationnelles du degrè n, on auroit une équation rationnelle du degré $2\,n$ qui auroit deux racines égales; donc différenciant, on aura la racine propoſée, ou par une équation ſoit linéaire, ſoit inférieure au degré n; ce qui eſt contre l'hypothèſe; ou par une équation du degré n; or ce dernier cas ſuppoſeroit que l'équation en x du degré n^{n-1} a n racines égales deux à deux, a toutes les racines égales au moins deux à deux, ou plutôt les a toutes n à n, puiſque n eſt en général le ſeul diviſeur de n^{n-1}, donc l'équation en x du degré n^{n-1} feroit réductible en général à une rationnelle du degré moindre, ce qui eſt contre l'hypothèſe.

IV. Il ſuit des mêmes principes que ci-deſſus, que ſi $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$ . . . . eſt la racine d'une équation du degré n, l'équation du degré n^{n-1} eſt formée par le produit de n^{n-2} équations du degré n, qui ne diffèrent de la propoſée que parceque leurs coefficiens ſont multipliés par d'autres nombres. Nous obſerverons ici que l'équation rationnelle en n, étant ſous la forme

$$x^n + a^2\ x^{n-2} + b^3\ x^{n-3} + c^4\ x^{n-4} \ldots\ldots + q^n,$$

les autres équations feront

$$x^n + A_1\, a^2\, x^{n-2} + B_1\, b^3\, x^{n-3} + (C_1\, c^4 + D_1\, a^4)\, x^{n-4} \text{ \&c.}$$

mais ſi on avoit regardé l'équation

$$x^n + A_1\ a^2\ x^{n-2} + B_1\ b^3\ x^{n-3} \ldots\ldots = o,$$

comme étant la propoſée, l'équation

$$x^n + a^2\ x^{n-2} + b^3\ x^{n-3} \ldots\ldots = o,$$

ſeroit devenue

$$x^n + \frac{1}{A_1}\ (A_1\ a^2)\ x^{n-2}$$

$$+ \frac{1}{B_1}\ (B_1\ b^3)\ x^{n-3}$$

$$+ \frac{1}{C_1}\ (C_1\ c^4 + D\ a^4) - \frac{D}{CA^2}\ (A\ a^2)\ x^{n-4};$$

& ainſi de ſuite; & il n'y a pas lieu de ſavoir ſi en général on peut ſuppoſer à ces autres équations une forme plus ſimple.

V. Maintenant ſoit

$$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C} \ldots\ldots$$

au nombre de p termes, nous aurons une équation en x du degré n^p. Suppoſons que $x^n + a^2\ x^{n-2} \ldots\ldots + q^n$, ſoit une équation rationnelle qui diviſe l'équation du degré n^p $a^2 \ldots q^n$ demeurant quelconques, il eſt aiſé de voir que ſi le nombre p eſt $n - 1$, on pourra avoir, en mettant pour x^n ſa valeur, une équation

$$V\ x^n + V'\ x^{n-1} \ldots\ldots = o;$$

que la multipliant par x, & ſubſtituant, on en a une ſeconde de la même forme, qui ſera

$$Z\ x^n + Z'\ x^{n-1} \ldots\ldots\ldots = o;$$

que multipliant la première par Z', on aura une équation

$$V\,Z' - V'\,Z\,x^n + V''\,Z' - Z''\,V\,x^{n-2}\ \text{\&c.}$$

ou mettant pour x^n ſa valeur, on aura $n - 1$ équations pour déterminer les $n - 1$ quantités indéterminées; donc il faut toujours ſuppoſer qu'il y a un nombre d'A, B, C, &c. En effet, ſi on le fait plus petit, il y a trop d'équations de comparaiſon, & ſi on le fait plus grand, il reſtera des valeurs indéterminées. Il ſuit de là que la formule qui renferme $n - 1$ radicaux indéterminés dans la même racine, eſt la ſeule qui puiſſe convenir.

VI. Supposons maintenant que sous le signe $\sqrt[n]{}$ il se trouve des fonctions de radicaux successifs, en sorte que le radical d'un degré quelconque ne contienne qu'une seule fonction sous lui, ou des fonctions composées des mêmes radicaux, il est aisé de voir qu'il faudra $n - 1$ radicaux successifs.

VII. En effet pour que l'équation

$$x^n + a^2 x^{n-2} \ldots\ldots + q^n = 0$$

ait une racine

$$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C} \ \&c.$$

il faut que parmi les AB, AC, &c. il y ait un terme qui devienne $\overline{P+Q}^{\,n}$ en sorte que P soit rationnel, & Q tel que la somme de toutes les quantités semblables qui se trouvent dans le terme formé par les produits des A, B, C . . . . . sous le signe $\sqrt[n]{}$, & qui doit être égalé à a^2, que la somme, dis-je, de tous ces termes soit nulle. Mais pour que $A\,B$ ait cette propriété, sans que A soit de la même forme, il faut que faisant

$$A = A' + \sqrt[m]{B'} + \sqrt[m]{C'} \ \&c.$$

& $B = A' + a\sqrt[m]{B'} + b\sqrt[m]{C'}$, &c. ($a$ & b sont des nombres) on ait ou $B'C' = \overline{P' + Q'}^{\,m}$ ou $B\,B' = \overline{P' + Q'}^{\,m}$, & ainsi de suite; en sorte qu'il faudra que dans les radicaux successifs il y en ait un quarré: on prouvera de même qu'il faudra qu'il y ait un radical troisième, un radical quatrième, ou un nouveau radical quarré, un radical cinquième, &c. & ainsi de suite jusqu'au radical n qui n'est pas nécessaire, puisque le dernier terme contient A, B, C, &c. au premier degré, ainsi il n'y a aucun besoin que A contienne des radicaux plus élevés; mais cela ne prouve pas qu'il n'en puisse contenir.

VIII. Maintenant supposons que $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$ &c. les A, B, C, &c. étant au nombre de $n - 1$, soit la ra-

cine de l'équation du degré n; M.r de la Grange a prouvé qu'en général si n est un nombre premier, l'équation en A sera réductible au degré $1 . 2 . 3 \ldots\ldots n - 2$; & que si n est un nombre qui ait des diviseurs, elle sera réductible si m est un diviseur premier; ensorte que $n = m n'$ au degré $\frac{1 . 2 \ldots\ldots n}{1 . 2 . 3 \ldots m . 1 . 2 . 3 \ldots\ldots n'} m$; donc si m & n' sont des nombres premiers, elle le sera aussi au degré $\frac{1 . 2 . 3 \ldots\ldots n}{1 . 2 \ldots\ldots m^{n'} . 1 . 2 . 3 \ldots n'}$, c'est-à-dire, réductible, en supposant $m < n'$ également à une équation du degré $\frac{1 . 2 . 3 \ldots\ldots n}{1 . 2 . 3 \ldots\ldots m^{m+1} . \overline{m+1 . m+2 \ldots n'}} m$, ou à une équation du degré $\frac{1 . 2 . 3 \ldots\ldots n}{1 . 2 . 3 \ldots\ldots m^{n'+1} . m+1 . m+2 \ldots n'}$, ou, ce qui est la même chose, à une équation du degré $\frac{1 . 2 \ldots\ldots n}{1 . 2 . 3 \ldots m^{m+1} . \overline{m+1 . m+2 \ldots n'}} \times \frac{1}{1 . 2 . 3 \ldots m^{n'-m}}$, ou à une du degré $\frac{1 . 2 \ldots\ldots n}{1 . 2 . 3 . m^{m+1} . \overline{m+1 . m+2 \ldots n'}} \times \frac{1}{m+1 . m+2 \ldots n^{m}}$, & par conséquent réductible à une du degré $\frac{1 . 2 \ldots\ldots n}{1 . 2 . 3 \ldots m^{n'+1} . \overline{m+1 \ldots n'}^{m}}$.

IX. Si l'on examine maintenant la forme de ce dernier nombre, on trouvera qu'en général l'équation en A n'est réductible qu'à une équation dont le degré est un produit de nombres plus petits que n, mais lui-même plus grand que n; & l'on verra que si on traite cette équation réduite comme la proposée, on parviendra à une réduite d'un degré encore plus élevé, & ainsi de suite. Mais si l'on ne peut espérer, par ce moyen, de parvenir à une équation toujours de plus en plus rabaissée, on peut être sûr, cependant, qu'en la répétant un nombre de fois

ſuffiſant, on parviendra à une équation rationnelle. En effet, ſuppoſons que la dernière équation réduite ſoit du degré $m' \; n' \; p'$ &c. m', n', p' &c. étant des nombres $< n$, que nous ſuppoſions l' inconnue x' de cette équation miſe ſans ſecond terme, & que nous faſſions

$$x' = \sqrt[m'\,n'\,p'\,\&c.]{A'} + \sqrt[m'\,n'\,p]{B'} \;\&c.$$

au nombre de $m' \; n' \; p' \ldots - 1$; il eſt aiſé de voir que les fonctions A', B', C contiennent un moindre nombre de radicaux ſucceſſifs que la valeur de x'; & qu'ainſi en continuant toujours de même, on parviendra, ſi la propoſée a une racine exprimable en termes finis, à une équation dont la racine ſera rationnelle. Mais jusqu' ici on n' a pas encore pu parvenir à déterminer combien d'équations ſucceſſives en x', x'', &c. on auroit à réſoudre auparavant.

X. Il eſt au moins très-vraiſemblable que cette manière générale de réſoudre l' équation en x' du degré $m' \; n' \; p' \ldots\ldots$ eſt trop générale. En effet cette manière feroit dépendre la ſolution de la propoſée de radicaux qui auroient pour expoſans des nombres premiers contenus entre $m' \; n' \; p' \ldots\ldots$ & n; or ces radicaux ne doivent pas être contenus dans la racine d'une équation du degré n. Suppoſons donc que

$$x' = \sqrt[m'\,n'\,p'\ldots]{A'} + \sqrt[m'\,n'\,p']{B'} \quad \&c.$$

les A', B', C' &c. étant au nombre ſeulement de $m' - 1$, ou $n' - 1$, ou $p' - 1$ termes, &c. il eſt aiſé de voir 1.° que ſi l' expoſant $m' \; n' \; p' \ldots\ldots$ du radical a été ſuppoſé trop grand, & qu' il ne doive être que m', n', p', &c. nous aurons une équation en A', telle que la même équation feroit auſſi rationnelle pour $A'^{\frac{1}{n'p'\ldots}}$ $A'^{\frac{1}{m'p'\ldots}}$, & ainſi de ſuite. Ainſi dans ce cas l'équation en A' ne contiendra que des puiſſances $n' \; p' \ldots$ ou $m' \; p' \ldots$ 2.° que ſi le nombre des A', $B' \ldots\ldots$ n' eſt que $m' - 1$, on aura par

les principes employés par M. de la Grange, l'équation en A', du degré $(m'n'p'\ldots).(m'n'p'\ldots-1)$ jusqu'à $m'n'p'\ldots\ldots-m'$ degré qui s'abaissera par des réductions de la manière que M. de la Grange l'a enseigné. 3.° que si on avoit au contraire pris $\sqrt[m']{A'}+\sqrt[m']{B'}$ &c. au nombre de $m'-1$, & que c'eût été le radical $\sqrt[m'n'p'\ldots]{}$ qu'il eut fallu prendre, l'équation ayant été trouvée en A', on auroit, en mettant au lieu de A', $Z^{\frac{1}{n'\cdot p'\cdots}}$ à cause de $Z=A^{n'p'}\ldots$ une équation en Z d'où le radical aura disparu; ce qui prouve que l'on peut sans inconvénient faire l'une ou l'autre supposition; 4.° que si le nombre des $m'-1$, $n'-1$ &c. est plus petit que ne doit être celui des fonctions, nous aurons, (en ne substituant dans l'équation du degré $x^{m'^{m'-1}}$ que les valeurs de $x'^{m'n'p'\ldots\ldots}$) $m'n'p'-1$ équations entre $m'-1$ variables qui nous serviront à voir si la supposition est légitime, & à avoir dans ce cas pour A', B' &c. les équations du plus petit degré possible. On voit aisément que si m' est le plus grand des facteurs $m'n'p'$, on aura presque toujours $m'^{m'-1}>m'n'p'\ldots\ldots$ & si on prend $\sqrt[m'n']{}$ ou $\sqrt[m'n'p']{}$ & ainsi de suite, on parviendra toujours à une équation en A' B' &c. x' qui sera d'un degré plus élevé que l'équation proposée. Au reste, si au lieu de supposer que toute racine de l'équation du degré $m'n'p'\ldots\ldots$ est de la forme $\sqrt[m']{A'}+\sqrt[m']{B'}$ au nombre de $m'-1$, on supposoit que ces deux équations n'ont que m' racines communes, on trouveroit toujours autant d'équations pour déterminer A', B', qu'il y auroit de ces quantités; mais la méthode ci-dessus me paroit plus propre à abaisser le degré de l'équation en A', autant que cela sera possible.

XI. Soit la proposée du degré n, que je suppose $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} \ldots\ldots$ au nombre de $n - 1$ termes, que je fasse évanouir tous ces radicaux, j'aurai une équation du degré n^{n-1} qui sera divisible par la proposée. Supposons la division faite, & le reste égal à zéro, les équations de condition donneront les valeurs que doivent avoir A, B, C, &c. pour que la racine hypothétique soit celle de la proposée; donc toute valeur de A, B, $C \ldots\ldots$ qui satisfera à la condition, donnera une valeur de la racine de la proposée. Supposons que l'élimination soit faite, & que nous aions C donné par une équation en A, B, C; B par une équation en A, B; & A par une équation du degré n', il est clair qu'à chaque racine de l'équation en A, répondront certaines valeurs de B, de C, & au moins une racine de la proposée; mais ces racines ne peuvent être qu'au nombre de n; donc soient

A, B, $C \ldots\ldots\ldots\ldots n - 1$ de ces racines;
A' B' $C' \ldots\ldots\ldots\ldots n - 1$ autres;
A'' B'' $C'' \ldots\ldots\ldots\ldots n - 1$ autres;

& ainsi de suite, lesquelles représentent n racines de la proposée, les autres racines de l'équation en A ne pourront être que quelques-unes de ces $n - 1 \cdot n$ racines; donc l'équation en A sera nécessairement réductible à une équation de ce degré, qu'on voit devoir se réduire à une du degré $m - 1$. Cette réflexion suppose que si $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} \ldots\ldots$ & $\sqrt[n]{C} + \sqrt[n]{D} \ldots\ldots$ sont des valeurs d'une même racine de l'équation en n, aucun de ces radicaux n'étant rationnel, il faut que $C = A$, ou $= B$ & $D = B$ ou $= A$. Si donc on suppose en général l'équation en A, telle qu'étant données $n \cdot n - 1$ valeurs de A, ou même $n - 1$, les autres racines soient égales à ces mêmes valeurs de A, multipliées par des nombres, ou à la somme d'un certain nombre de ces valeurs multipliées par des coefficiens numériques,

on pourra trouver un moyen de rabaiſſer l' équation en A.

XII. Généralement après avoir trouvé l' équation en A, il faudra (le degré de l'équation en A étant $p^t q^m r^s \ldots$) rechercher ſi cette équation n' eſt pas d' une forme telle que prenant

$$A^p + A' A^{p-1} + B' A^{p-2} \ldots = 0 ;$$

ou $A^q + A' A^{q-1} + B' A^{q-2} \ldots = 0$;

$$A^r + A' A^{r-1} + B' A^{r-2} \ldots = 0 ;$$

&c.

on ait A' par une équation du degré $p^{m-1} q^t r^s$ &c. ou $p^m q^{t-1} r^s$ &c. & en traiter de la même manière les équations en A', juſqu' à ce qu'on parvienne à une équation non reductible. Soit cette équation encore du degré $p^{m'} q^{n'} r^{s'} \ldots$ on ſuppoſera que ſa racine (le ſecond terme ayant été détruit) ſoit $A' = \sqrt[p]{A''} + \sqrt[p]{B''}$ au nombre de $p^{m'} - 1$ termes ; & ayant trouvé (n.° X.) l' équation en A'', ſi elle eſt poſſible, on la traitera comme on a traité l'équation en A, & ainſi de ſuite. Si cela n' étoit pas poſſible, il faudroit eſſayer la ſuppoſition de $A' = \sqrt[pq]{A''} + \sqrt[pq]{B'} \ldots\ldots$ au nombre de $p^{m'} q^{n'} - 1$, & continuer ainſi juſqu' à ce qu' on ait une équation en A''. Par ce moyen, toutes les fois que la propoſée aura une racine finie, on parviendra à la fin à une équation rationnelle, & le problême ſera réſolu.

XIII. Nous obſerverons ici que nous avons deux eſpèces de réductions à conſidérer ; l' une eſt celle dont nous venons de parler, & l'autre eſt numérique pour ainſi dire ; c' eſt lorſque, ou la propoſée ne contient que des puiſſances $x^{n'} \ldots$ ce qui fait que l' on a (faiſant $z = x^{n'}$) les valeurs de x en z par la ſolution de l' équation numérale $y^n - 1 = 0$; ou bien lorſque la propoſée du degré n' eſt diviſible par une équation du degré $m' < n'$, les coefficiens de cette nouvelle équation étant rationnels

quant aux fonctions algébriques. Il faudra donc examiner d' abord si les équations réduites qui servent à la solution du problême ne sont pas susceptibles de ces réductions. La seconde espèce de réduction est algébrique, c' est celle où l' on suppose qu' une équation du degré $p\,q$, par exemple, est telle que l' on puisse y substituer une équation du degré p, dont les coefficiens soient donnés par une équation du degré q, ou réciproquement; & comme nous l' avons dit dans le mémoire précédent, il ne faut jamais tenter la solution d' une équation par la substitution de la forme $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} \ldots$ que l' on n' ait examiné toutes les réductions dont elle peut être susceptible, toutes les fois que le nombre des coefficiens algébriques indéterminés de l' équation est plus petit que l' exposant de degré diminue d' une unité.

XIV. Nous avons donné dans le premier article de ce mémoire, la manière d' avoir en général une équation rationnelle en x, A, B, C, lorsqu' on a $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} \ldots$ Supposons que nous ayons cette équation du degré n^{n-1}, nous la pouvons supposer être identique au produit de n^{n-2} équations

$$x^n + a^2\ x^{n-2} \ldots + g^{n-2}\ x^2 + h^{n-1} + q^n = 0;$$

$$x^n + p\,a^2\,x^{n-2} \ldots\ldots$$

$$+ p_{,}\,q^n + p_{,,}\,a^2\,q^{n-2} = 0;$$

où les coefficiens $p, p_{,}\ p_{,,}$ sont des nombres, ou bien identique à

$$x^n + a^2\ x^{n-2} \ldots\ldots + q^n,$$

multipliée par

$$x^{n^{n-1}} - n + p\,a^2 x^{n^{n-1}} - n - 2, \text{ \&c.}$$

Cela posé, nous avons trouvé ci-dessus que le coefficient de $x^{n^{n-1}} - n$ étoit dans l'équation en x, A, B, C, &c. de la forme $M.\overline{A + B + C}$ &c. que celui du terme suivant étoit $N.\overline{A + B + C}^2 + N'$ (le produit des A, B, C, &c.

deux à deux;) celui du terme ſuivant égal à $P. \overline{A+B+C\ldots}^3$ $+ P'. \overline{A+B+C\ldots}$ (le produit des A, B, C, &c. deux à deux) $+ P''$ (le produit des A, B, C, &c. trois à trois) & ainſi de ſuite. Donc égalant ces valeurs aux termes correſpondans de l' équation en x, a^2, b^3, &c. & laiſſant les coefficiens numériques indéterminés, on aura des valeurs rationnelles; 1.° de $A+B+C$, &c. 2.° du produit des A, B, C, &c. deux à deux; 3.° du produit des A, B, C, &c. trois à trois, & ainſi de ſuite; donc on aura une équation en A, ou B, &c. rationnelle quant aux quantités algébriques & du degré $n-1$.

XV. Les ſeules choſes qui pourroient empêcher cette concluſion, ſeroient 1.° ſi l' on avoit un coefficient de l' équation en x, A, B, C, &c. pour le terme $x^{n^{n-1}} - n\,m$, qui ne contint point le produit convenable des A, B, C, &c. pris m à m. Ce dont il eſt aiſé de s' aſſurer d' après le premier article, & cela n' exige qu' un calcul que tout le monde peut faire. 2.° S' il arrivoit que les coefficiens numériques des termes de l'équation ci-deſſus du degré $n-1$, fuſſent $\frac{0}{0}$, ce qui eſt plus difficile à conſtater en général.

XVI. Si aucun de ces inconvéniens n' a lieu, alors on aura par ce moyen l' équation littérale réduite par une voie très ſimple, & pour la détermination des coefficiens numériques $p_{\prime}$, $p_{\backslash}$, $p'_{\prime\prime}$ &c. (n.° XII.) comme on a les coefficiens des termes au delà de $x^{n^{n-1}} - n + \overline{n-1}$ donnés & coefficiens des termes précédens, on aura immédiatement les équations de condition, en formant ces termes & égalant à zéro le coefficient de chaque terme en a^2, b^3, &c.

XVII. Il ſeroit donc très utile d' avoir des formules générales & abrégées pour calculer les fonctions homogènes de a^2, b^3, c^4, ... q^n, auquel le problême propoſé conduit à chaque inſtant.

XVIII.

XVIII. D'abord, ſoit $n - 1$ le nombre des $a^2, b^3, \ldots q^n$, & $n' = mn + p$ $p < n$ le degré de la fonction homogène cherchée, nous aurons le nombre T des termes de la fonction homogène égal à ce que devient T, en y mettant pour n, $n - 1$, plus ce que devient T en mettant pour n, $n - 1$, & pour n', $n' - n$, plus ce que devient T en mettant pour n, $n - 1$, & pour n', $n' - 2n$, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce que devient T, en y mettant p au lieu de n & de n'. (Mais il ne s'agit pas ici de développer cette théorie, non plus que la manière d'avoir les coefficiens de chacun des termes; ce qui dépend de la théorie des combinaiſons.)

XIX. Connoiſſant en général la manière de former ces fonctions homogènes, on réſoudra ce problême: étant donnée une équation dont les coefficiens ſoient de cette forme & une propoſée; ſavoir ſi ſuppoſant ces coefficiens numériques indéterminés, la forme hypothétique ne réſout pas la propoſée. On pourra y parvenir par la méthode des coefficiens indéterminés, & on aura les équations de condition entre les coefficiens, ſi on fait former les fonctions de l'article précédent.

XX. Pour cela on cherchera d'abord une propoſée $x^{n'} + a x^{n'-1} + b^e x^{n'-e} \ldots\ldots\ldots$ étant données les équations de condition pour qu'elle ait pour racine les n racines de $x^n + a x^{n-1} \ldots\ldots$ en ſuppoſant a' ou a connus à volonté. Cela poſé, on prendra telle hypothèſe qu'on voudra pour la forme de la racine cherchée, & faiſant diſparoître les radicaux & comparant terme à terme, on aura les équations de condition entre les coefficiens numériques, pour que cette forme ſoit celle de la racine propoſée; ou bien, ſi au lieu de la forme de la racine cherchée on prendra ſeulement $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} \ldots\ldots A$ & B pouvant être irrationnels, on aura les équations en A, B. Ces équations en A, B, &c. ſont alors en bien plus grand nombre que les A, B, &c. mais cela ne peut

ſervir à abaiſſer le degré des équations en A, B, parce-que les coefficiens numériques doivent être tels que ces équations ſe réduiſent à $n - 1$; mais cependant ſi on doit avoir des équations d' un degré moindre en n'ayant égard qu' aux fonctions algébriques, on les trouvera par ce moyen. En effet il n' y aura qu' à ſuppoſer dans toutes ces équations A, B, C, &c. . . . données par une équation du degré m, par exemple, le même pour toutes, on aura, 1.° le degré de cette équation & la forme de ſes coefficiens en a^2, b^1, &c. 2.° les équations en A, B, C, &c. les contenant d' une manière ſemblable, on aura toutes ces équations en valeurs de ces coefficiens, & par conſéquent immédiatement les équations de comparaiſon entre les coefficiens. Si on veut examiner ſi l' équation en A, B, &c. eſt réductible, ou non; on prendra ces différentes hypothèſes, & on comparera de même ſans avoir beſoin d'élimination.

Ceci pourroit donner lieu à des développemens plus étendus, que je ſupprime, mais auxquels je me livrerai ſi les géomètres trouvent que ces recherches méritent d'être ſuivies.

ARTICLE III.

Il ne me reſte plus maintenant pour remplir le plan que je me ſuis propoſé, qu' à examiner la poſſibilité ou la non poſſibilité de la réduction à l' indéfini de toutes ces équations. J' y ajouterai quelques remarques ſur l' élimination & ſur la manière la plus ſimple de la faire.

I. Si d' abord nous examinons les remarques de M.r De la Grange, nous trouvons que la méthode générale ne nous conduit qu' à des réduites toujours plus élevées que la propoſée, lorſqu' elle eſt du 5.e 7.e 8.e degré, &c. car il me paroit d' après les recherches de M.r De la Grange, & de M.r Vandermonde, qu' on peut regarder celle du 6.e comme ſe réduiſant au cinquième.

II. Si on examine les remarques du premier article de ce mémoire, & que produiſant par le moyen d' une des formes quelconques de radicaux, une équation du degré p, on ſuppoſe que cette équation ſoit le produit d' une équation rationnelle du degré $p - n$ par une du degré n; il eſt clair que le nombre de termes en a^2, b^3 .... q^n dont les coefficiens numériques ſont indéterminés, eſt égal, 1.° au nombre des termes ſemblables dans une équation du degré $p - n$. 2.° au nombre de ces termes qui entrent dans la forme hypothétique; & que celui des équations de comparaiſon eſt celui de tous les termes qui entrent dans une équation du degré p; en ſorte que ce nombre ſurpaſſe celui des coefficiens indéterminés de celui du nombre des termes contenus dans n fonctions de a^2, b^3 .... du degré p, $p - 1$ .... $p - n + 1$ moins celui des mêmes termes dans des fonctions du degré n, nn', $nn' n''$ .... $nn' n''$ ... $n'^{\ldots m-1}$ au nombre de m, m étant le nombre des radicaux ſucceſſifs, & n, n', n'' ... $n^{'''-m-1}$ leurs expoſans. Or ce nombre eſt toujours poſitif. Donc en général le nombre des équations ſurpaſſera toujours celui des coefficiens indéterminés.

III. Ces deux réflexions ne ſuffiſent pas pour aſſurer la non poſſibilité de la ſolution générale, ni même pour prouver qu' on ne puiſſe démontrer cette poſſibilité. Examinons donc les moyens de s' en aſſurer.

IV. Nous avons d' abord l' abaiſſement de l' équation du degré p (N.° II.). Cette équation n' eſt pas l' équation générale du degré p; elle ne contient qu' un nombre plus petit de coefficiens indéterminés, elle eſt donc ſuſceptible d' abaiſſement, & il eſt clair que ſi on prouve que cette équation eſt réductible algébriquement (les coefficiens numériques reſtant irrationnels) à une équation telle que le nombre des équations ne ſurpaſſât point celui des coefficiens, le problême ſeroit réſolu; & ſi cela n' eſt pas encore poſſible en général, cette conſidération peut du moins ſervir à diminuer l' excès du nombre des conditions ſur

celui des coefficiens indéterminés. On pourroit diminuer encore la difficulté en confidérant d'abord une équation du degré $p - n$ multipliée par $x^n + a^2 x^{n-2} + b^3 x^{n-3} \ldots\ldots + q^n$, & telle qu'il n'y ait dans le produit que des puiffances n, & en examinant ce qui refte de termes indéterminés. On fuppoferoit de même, comme cela fuit de la difparition fucceffive des radicaux inférieurs fous les fignes n', n'', que l'équation eft formée femblablement des puiffances n', n'', &c. & il eft très poffible que fous ce point de vue, l'excès du nombre des conditions foit encore diminué.

V. En attendant que ces calculs foient exécutés, voici toujours une méthode de s'affurer de la poffibilité du problême. Soit (article 2.) l'équation réduite autant qu'elle peut l'être & du degré m, p, q, r; ces nombres étant premiers & moindres que n, s'effaie la folution de cette équation par la même méthode que la propofée & je cherche une autre réduite. J'examine le degré le plus bas où elle s'abbaiffe : fi ce degré a pour divifeurs premiers des nombres plus grands que ceux qui formoient le produit par lequel le degré de la propofée étoit exprimé, ou des nombres égaux à n, ou plus grands, on pourra regarder la folution comme impoffible, finon on pourra la regarder comme poffible. Continuant, on obfervera fi dans chaque réduite le nombre des termes dont le produit forme le degré de l'équation, ne diminue pas, quant au nombre foit des produifans, foit quant à leur degré.

VI. Si on rapproche de ceci ce que j'ai dit, (article 1.er N.os 14. & fuiv.) on verra que chaque opération qu'on fait pour chercher les réduites, tend à débarraffer d'un radical; on verra également pourquoi les équations fe préfentent fous un degré plus élevé que le produit des radicaux fucceffifs ou leurs puiffances, pourquoi ce degré pourroit être le produit du nombre premier plus grand que n, comment enfin il doit toujours pouvoir fe rabbaiffer au deffous.

VII. Je finis par quelques réflexions ſur l' élimination. L' introduction à l' analyſe de l' infini de M. Euler renferme d' excellens principes ſur cette matière ; c' eſt d' après lui que je vais procéder ici.

VIII. Quel que ſoit un m nombre d' équations entre m variables x, y, z, u .... ſi je veux avoir une équation déterminée en une ſeule variable, il eſt clair que, quelque méthode que je prenne, l' équation déterminée en x, par exemple, ſera une fonction de x égalée à zéro; & ſi $A = 0$, $A' = 0$, $A'' = 0$, &c. ſont les équations propoſées, cette fonction de x purs ſera $AB + A'B' + A''B''$ &c.

IX. B, B', B'', ſeront des fonctions entières toutes les fois que l' on n' aura point d' équation en y, z, u .... Satisfaiſant aux équations

$$A = 0, A' = 0, \text{ \&c.}$$

indépendamment de x. Dans ce cas, ſi on veut avoir x, il faut ſuppoſer à B, B', B'', &c. un dénominateur.

X. Suppoſons donc que l' on cherche l' équation la plus ſimple rationnelle en x, qui ſatisfaſſe aux équations $A = 0$, $A' = 0$, $A'' = 0$, &c. il n' y aura qu' à les multiplier par les fonctions, ſi m eſt le degré de ces équations

$$\frac{C}{D}, \frac{C'}{D}, \frac{C''}{D}, \text{ \&c.}$$

les C étant des fonctions entières du degré u, & D du degré $n + m - 1$, tout au plus. Prenant au lieu de chaque C & de D, des ſéries indéfinies, multipliant & ſuppoſant $\frac{AC}{D} + \frac{A'C'}{D}$, &c. une fonction entière de x, & l' egalant à zéro, on aura l' équation cherchée ; & ſuppoſant ſucceſſivement pour chaque degré des fonctions C, celui des D, le plus grand qu' il eſt poſſible.

XI. Si on cherche au contraire l' équation en x la plus élevée qu' il eſt poſſible, toujours en ſuppoſant qu' on n' admette point de racines inutiles, il faut, en ſuivant la

même opération, prendre pour les C, comme pour la quantité D, le plus petit degré qui puiſſe réuſſir.

XII. Toutes les fois que l'on n'a aucune valeur de y, z, u, &c. indépendantes de toute valeur des x, on aura par cette manière la valeur des coefficiens de l'équation en x, en réſolvant des équations linéaires ; & comme il eſt aiſé de voir en général la forme de ces équations, on ſubſtituera immédiatement aux équations à éliminer un ſyſtème d'équations linéaires. Cela peut être d'une grande utilité dans la pratique.

XIII. Il y a maintenant deux cas à conſidérer; 1.° celui où s'arretant à un degré pour les valeurs des C, le nombre de ces équations linéaires eſt plus grand que celui des coefficiens indéterminés. Dans ce cas, la ſolution n'eſt poſſible que lorſque les coefficiens des équations propoſées ont entre eux certaines conditions. 2.° Lorſque dans la même hypothèſe le nombre des coefficiens eſt plus grand ou égal à celui des équations. Il ſemble qu'alors on devroit conclure qu'en général la ſolution eſt poſſible ; mais il faut obſerver qu'il faut que le ſyſtème ne puiſſe pas ſe diviſer en deux autres dans l'un deſquels le nombre des indéterminées ſoit plus petit que celui des équations. Par exemple, ſoit $m + n$ le nombre total des équations, $p + q$ celui des indéterminées, & $p + q > n + m$. Si p de ces indéterminées ſe trouve n'entrer que dans n équations, & que $p < n$, on voit que l'élimination n'eſt pas poſſible, tant que les facteurs C ne feront pas plus élevés.

XIV. Si les équations ſe trouvent réellement en moindre nombre que les coefficiens, il y a une remarque importante à faire. Il peut arriver que la fonction $AC + A'C' + A''C''$, &c. qui devient une fonction entière de x par l'hypothèſe, ſe trouve monter à un même degré, quelques coefficiens de C, C', C'', &c. reſtant arbitraires. Dans ce cas, comme la véritable équation en x ne doit pas en contenir, il eſt aiſé de voir que pour avoir cette équa-

tion, il faut chercher le diviſeur le plus élevé de la fonction $AC + A'C' + A''C''$, &c. qui ne contienne pas de coefficiens arbitraires, & ce diviſeur ſera l'équation cherchée.

XV. On aura donc toujours dans ce cas l'équation la plus ſimple. La même choſe aura lieu pour celui où l'on ſuppoſe que les C peuvent avoir un dénominateur ; mais alors on peut réduire les opérations à la ſolution d'équations linéaires.

XVI. On voit en général que quelque méthode que l'on choiſiſſe pour avoir une équation en x, on aura toujours la fonction.

$$AC + A'C' + A''C'' \text{ \&c.} = 0 ,$$

qui répond également aux ſyſtèmes d'équation

$$A = 0,\ A' = 0,\ A' = 0 \ldots .$$
$$A = \quad A' = 0,\ C'' = 0 \ldots\ldots$$
$$A = \quad C' = 0,\ A'' = 0 \ldots .$$

& autant de ſyſtèmes qu'on pourra former de la même manière ; & il faut pour que $AC + A'C' + A'C''$ &c. ſoit la fonction de x, la moins élevée poſſible, que ces ſyſtèmes aient abſolument le même nombre de valeurs de x qui y ſatisfaſſent. Hors de ce cas, quelque méthode d'élimination que l'on choiſiſſe, elle conduiroit toujours à une équation plus élevée qu'elle ne doit être.

On trouvera toute la théorie de l'élimination développée d'une manière très ſavante dans un mémoire préſenté par M. Bézout à l'Académie Royale des Sciences de Paris, & qu'elle publiera dans le volume de ſes mémoires pour l'année 1773.

XVII. Par la méthode ſuivante, dont la marche eſt très ſimple, on pourra parvenir à trouver la racine cherchée de toute équation déterminée.

Soit une équation du dégré m ſans ſecond terme, on prendra x égal à $-$, $(a + b + c + d \ldots)$ au nombre de $m - 1$ & on comparera à la propoſée, terme à terme, le produit de $x + a + b + c$ &c. $\times\ x + n a + n^{1} b + n^{11} c$ &c. $\times\ x + p a + p' b + p'' c$ &c.... & ainſi de ſuite, les n les p, &c.

n' étant que des nombres qu'on déterminera par la condition, 1.° que (à cauſe du 2.^{d} terme qui manque, & qu' on ne doit pas avoir d' équation linéaire entre les a, b, c &c.) l' on ait $1 + 2 + n^{I} + n'' \ldots = o$ $1 + p + p^{I} + p^{II} \ldots = o$, & ainſi de ſuite. 2.° Que l' équation définitive en a qu' on aura, après avoir éliminé b, c &c. ne contienne que des puiſſances multiples de m de la quantité a, ou ſi m a des diviſeurs m^{I}, m^{II}, &c. des puiſſances multiples de m^{I}, ou de $m^{I}\,m^{II}$.

Enſuite on ſubſtituera au lieu de a, $z = a^{n}$; on fera diſparoître le ſecond terme, & on traitera l' équation en z^{I} comme la propoſée, en obſervant de déterminer alors les nouveaux coefficiens numériques n_{I} p_{I} &c. par les deux conditions ci-deſſus, & par cette troiſième condition que l' équation que l' on aura en a^{I}, $z^{I} = -(a^{I} + b^{I} + c^{I} \ldots)$ ait, s' il eſt poſſible, un facteur rationel ; & on aura ſoin, lorſque cela arrive, de prendre pour n_{I} p_{I} &c. les valeurs qui rendent le degré de ce facteur le plus petit poſſible ; & ſi $a^{I n \cdot I}$ eſt la puiſſance de a^{I} dont il ne doit ſe trouver que les multiples de l' équation, on cherchera les valeurs de u^{I} p^{I} qui rendront m^{I} le plus grand poſſible.

On réſoudra l' équation en $a^{I m^{I}}$ comme l' équation en $z\,l$ & ainſi de ſuite.

Par ce moyen à chaque opération on fera diſparoître un des radicaux qui entrent dans la forme de la racine de l' équation, & l'on aura le double avantage de donner à z^{I} la forme qu' il doit avoir rigoureuſement & indépendamment de toute hypothèſe ; & ſi cette forme eſt trop compliquée, d' éviter les embarras qui pourroient naitre de cette complication ſuperflue.

On aura donc, par là, la racine toutes les fois qu' elle eſt poſſible ; & ſi elle ne l' eſt pas toujours (ce qui me paroit très-peu vrai-ſemblable) on découvrira ſon impoſſibilité par celle de la réduction de l'équation en $a^{I m^{I}}$ ou des ſuivantes.

ERRATA DANS LA PARTIE MATHEMATIQUE.

Pag. 17. *l.* 1. $\frac{\delta z}{dy} + a\,\frac{dz}{dy}$ *lisés* $\frac{\delta x}{dx} + \frac{a\,dz}{dy}$

Pag. 17. *l.* 13. q & φ'; *lisés* φ & φ';

Pag. 20. *l.pen.* des révolutions *lisés* de révolution

Pag. 35. *l.* 11. donc l'equation est *lisés* dont l'equation est

Pag. 35. *l.pen.* les ordonnées *PM* & *PM* *lisés* *QM* & *PM*

Pag. 37. *l.pen.* en x' en x' & y' *lisés* en x' & y'

Pag. 41. *l.* 9. de la fonction $'$ *lisés* de la fonction φ'

l. 14. $z = \varphi`(bx - y)$ *lisés* $z = \varphi`(bx - y`)$

Pag. 43. *l.* 21. $K\,m''$ *lisés* $K\,m'''$

l. 23. dans W *lisés* dans $`W$

l. 25. $V = a$ *lisés* $`V = a$

Pag. 47. *l.* 14. $Ph = W'$ *lisés* $Ph = W`$

l. 20. $W' = u$ *lisés* $`W = u$

l. 22. $AI = W$ *lisés* $AI = `W$

Pag. 49. *l.* 2. x' & $y`$ *lisés* x' & y'

Pag. 53. *l.* 14. $\varphi = \frac{b-c}{cv}p + \frac{q}{c}cv$ *lisés* $\frac{b-c}{cv}p + \frac{q}{c} - cv$

l. 17. $\frac{qy}{c}\;cy$ *lisés* $\frac{qy}{c} - cy$

Pag. 57. *l.* 22. $\varphi`\,u$ *lisés* $\varphi'\,u$

Pag. 62. *l.* 4. $W' = x\,(b + 1)$ *lisés* $W'' = x\;b + 1$

Pag. 66. *l.* 9. $\varphi u = F(f.a) - h - al$ *lisés* $= F\,(f.a) - h - Al$

l. 26. point de construction *lisés* point de contradiction

Pag. 80. *l.* 16. le frottement des menses *lisés* des meules

Pag. 82. *l.* 16. $x^2\frac{\delta^3 z}{dx^2} = dV$ *lisés* $x^2\frac{\delta^3 z}{dx^2} = \delta V$.

Pag. 94. *l.ult.* $\frac{dy}{y^m}\;\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ *lisés* $\frac{\Upsilon\,dy}{y^m}\;\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$

Pag. 98. *l.* 4. $+ x^{m-2}\,F\left(\frac{x}{y}\right)$ *lisés* $+ x^{m-2}\,F'\left(\frac{x}{y}\right)$

Pag. 99. *l.* 18. $+\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\int^{m'}\frac{\Upsilon dy^m}{y^m}$ *lisés* $+\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\int^{m'}\frac{\Upsilon^{n} dy^m}{y^m}$

Pag. 105. *l.* 4. la conitante a qui ſe trouve *liſés* la conſtante a

l. 10. $x\frac{\delta z}{dx}y+\frac{dz}{dy}$ *liſés* $x\frac{\delta z}{dx}+y\frac{dz}{dy}$

Pag. 116. *l.* 6. $\int\frac{\Upsilon dy}{P+1y}$ *liſés* $\int\frac{\Upsilon dy}{y^{P+1}}$

Pag. 116. *l.* 17. empoyé *liſés* employé

Pag. 117. *l.* 18. 19. que ſi l'on avoit en $K=0$ *liſés* que ſi l'on avoit eu $K=0$

Pag. 126. *l.* 19. 20. ſi on nomme à la hauteur *liſés* ſi on nomme a la hauteur

l. 21. $f\,\text{ſin.}\left(\sqrt{\frac{P}{K}}+g\right)=0$ *liſés* $f.\,\text{ſin.}\left(a\sqrt{\frac{P}{K}}+g\right)=0$

Pag. 133. *l.* 27. par l'équation *liſés* pour l'équation

Pag. 137. *l.* 5. $\int\frac{du}{u}$ *liſés* $\int\frac{dx}{u}$

Pag. 142. *l. ult.* $\frac{P}{s^2}$ *liſés* $\frac{P}{S^2}$

Pag. 144. *l.* 3. $z^2+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2\pi^2}\right)$ *liſés* $z^2+\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2\pi^2}\right)$

Pag. 160. *l.* 2. $\alpha'=\frac{\sqrt{(P'^2+Q'^2)}}{2.\,\text{ſin.}\left(\pi\frac{\sqrt{\omega}-\sqrt{\omega'}}{2}\right)}$ *liſés* $\alpha'=\frac{\sqrt{(P'^2+Q'^2)}}{2.\,\text{ſin.}\left(\pi\frac{\sqrt{\omega}-\sqrt{\omega'}}{2}\right)}$

Pag. 186. *l.* 12. $\frac{29}{27}$ pour la probabilité *liſés* $\frac{19}{27}$ pour la probabilité

Pag. 200. 201. en pluſieurs endroits à la place de $\int v$ mettez partout $\int V$

Pag. 203. *l.* 18. faiſant $d\theta=dx$ *liſés* faiſant $d\theta=d\Psi$

l. 19. dx *liſés* $d\Psi$

Pag. 209. *l.* 3. $+n\frac{(n-1)}{2}x-(\pi+1-2\rho)$ *liſés* $\frac{+n(n-1)}{2}x^{-(\pi+1-2\rho)}$

Pag. 211. en plusieurs endroits K *lisés* k

Pag. 225. *l.* 29. l'intégrale de $ya^x dx$ sera $\frac{K a}{l a}$ *lisés* sera $\frac{K a^x}{l a}$

Pag. 230. *l.* 1. *Problême II. lisés Problême XI.*

Pag. 233. *l.* 14. $+\frac{2dd\Psi}{2dBdC}\varphi^{I}\varphi^{II}+\frac{dd\Psi}{2dA^2}$ *lisés* $+\frac{2dd\Psi}{2dBdC}\varphi^{I}\varphi^{II}+\frac{dd\Psi}{2dA^2}{}^2\varphi D$

Pag. 249. *l.* 21. $BB=\overline{P'+Q'}^{m}$ *lisés* $B'B'=\overline{P'+Q'}^{m}$

Fig. 1.

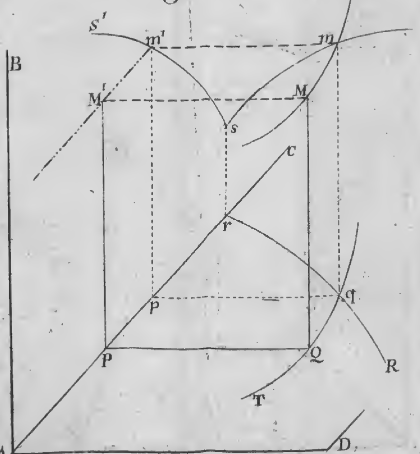


Fig. 2.

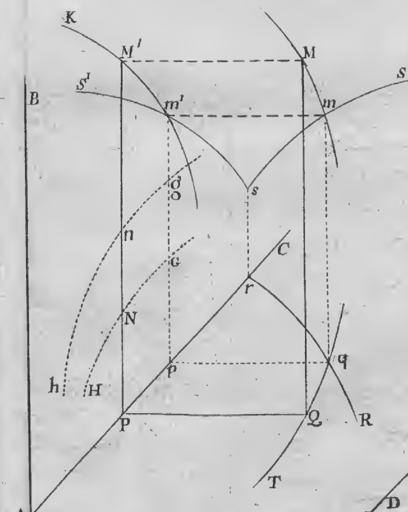


Fig. 3.

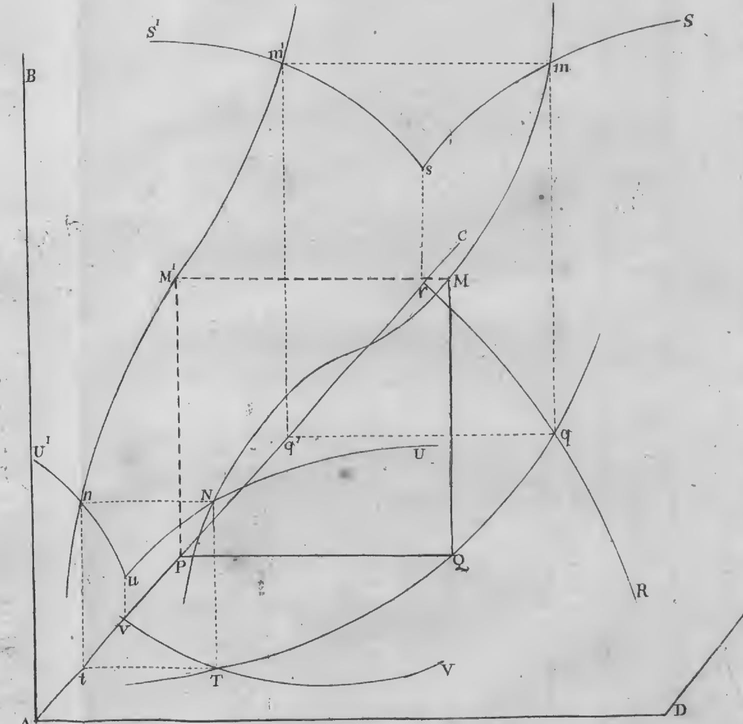


Fig. 4.

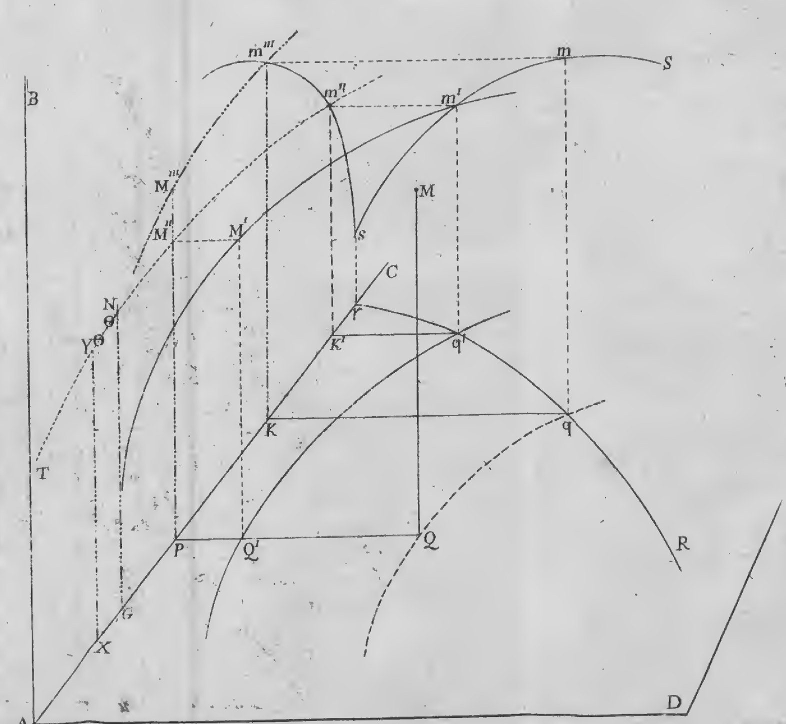


Fig. 5.

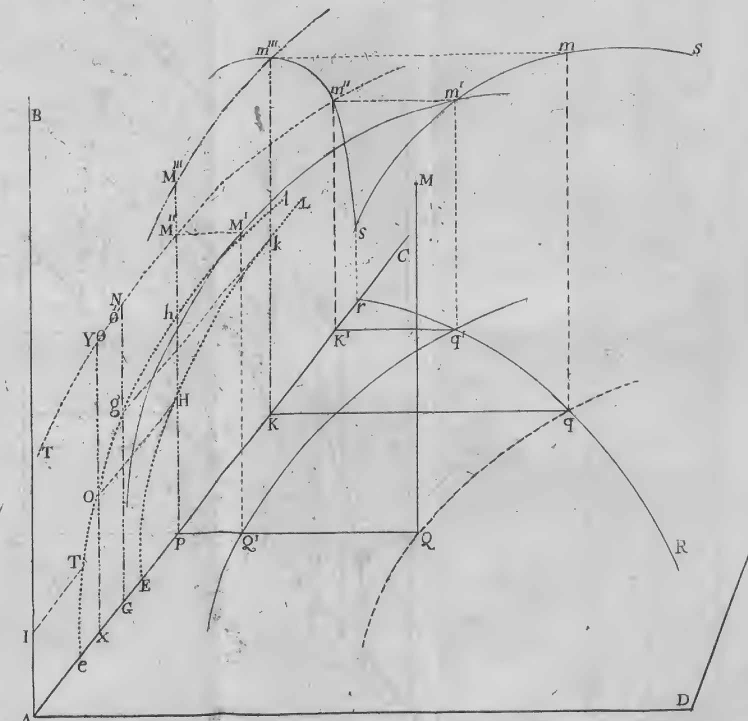


Fig. 6.

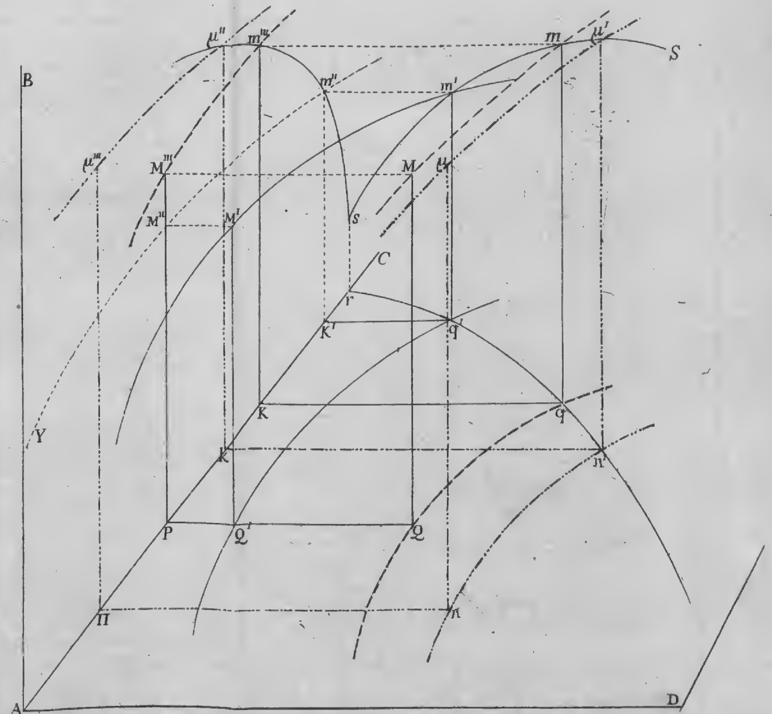
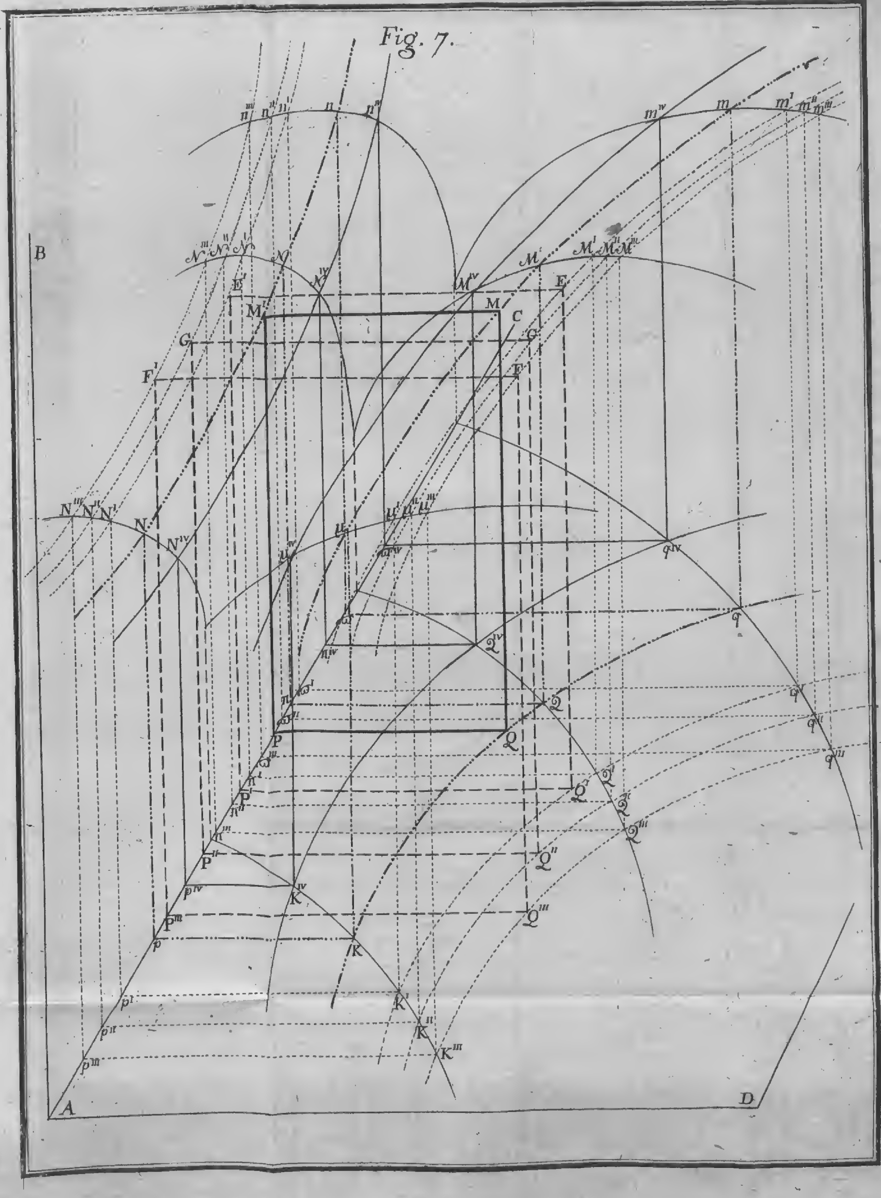


Fig. 7.



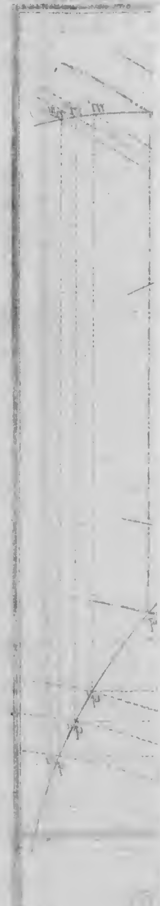


Fig. 1.

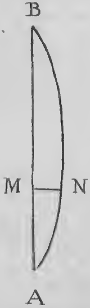


Fig. 2.

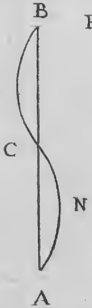


Fig. 3.



1611